

**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**  
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Syksy 2012**  
**Harjoitus 2**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 9.11.2012 klo 18.00  
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 23.11.2012 klo 18.00

Tehtävä 18 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

**Tehtäväsarja I**

1. Osoita, että joukko  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - y| = |y - z|\}$  ei ole vektoriavaruuden  $\mathbb{R}^3$  aliavaruus.
2. Osoita, että vektoriavaruus  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  on seuraavien vektoreiden virittämä:  
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
- 3.\* Onko joukko  $W = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a + b + c = 0\}$  polynomiavaruuden  $\mathcal{P}$  aliavaruus?

**Tehtäväsarja II**

4. Osoita määritelmän perusteella, että kuvaus  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$  ei ole lineaarinen.
5. Onko kuvaus  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (|x_1|, |x_2|)$  lineaarinen?
6. Onko kuvaus  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, L(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2, 2x_1)$  lineaarinen?
7. Onko kuvaus  $D: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, D(A) = \det(A)$  lineaarinen?

**Tehtäväsarja III**

Tehtävissä 8–10 oletetaan, että  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  on lineaarikuvaus, jolle pätee  $L(1, 0) = (1, 2)$  ja  $L(0, 1) = (-1, 1)$ .

8. Määritä  $L(3, -2)$ .
9. Havainnollista kuvan avulla vektoria  $(3, -2)$  luonnollisen kannan vektoreiden lineaarikombinaationa. Mitkä ovat vektorin koordinaatit? Piirrä toinen kuva vektorista  $L(3, -2)$  vektoreiden  $L(1, 0)$  ja  $L(0, 1)$  lineaarikombinaationa. Miten vektorin  $(3, -2)$  koordinaatit näkyvät toisessa kuvassa?
- 10.\* Oletetaan, että  $a, b \in \mathbb{R}$ . Määritä  $L(a, b)$ .
11. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus on

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, 3x_1 - 2x_2).$$

## Tehtäväsarja IV

Tarkastellaan kuvausta  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 - x_2)$ .

12. Osoita, että  $L$  on lineaarikuvaus. Voit joko käyttää lineaarikuvauksen määritelmää tai keksiä matriisin, jonka määräämä kuvaus  $L$  on.
13. Näytä, että vektori  $(1, 1, -1)$  on ytimessä  $\text{Ker } L$ .
14. Etsi kaksi muuta vektoria, jotka ovat ytimessä  $\text{Ker } L$ .

## Tehtäväsarja IV

Tutkitaan vielä tehtävän 2 matriiseja.

15. Osoita, että jono  $(B_1, B_2, B_3, B_4)$  on vapaa.
16. Osoita, että  $(B_1, B_2, B_3, B_4)$  on avaruuden  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  kanta. Määritä matriisi, jonka koordinaatit tämän kannan suhteen ovat  $-1, 4, 3$  ja  $5$ .

## Tehtäväsarja V

17. Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  yhteenlasku  $\oplus$  ja skalaarikertolasku  $\odot$  seuraavasti: jos  $x, y \in \mathbb{R}_+$  ja  $c \in \mathbb{R}$ , niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

Näitä laskutoimituksia tarkasteltiin jo harjoituksen 1 tehtäväsarjassa IV. Osoita, että vektoriavaruuden määritelmän ehdot 5 ja 7 pätevät joukossa  $\mathbb{R}_+$ , kun se on varustettu yhteenlaskulla  $\oplus$  ja skalaarikertolaskulla  $\odot$ .

## Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

18. Tutkitaan funktioavaruuden  $\mathcal{F}$  osajoukkoa  $\mathcal{F}_d = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ on derivoituva}\}$ . Osoita, että  $\mathcal{F}_d$  on vektoriavaruuden  $\mathcal{F}$  aliavaruus. Näytä, että derivointikuvaus  $L_d: \mathcal{F}_d \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $f \mapsto D(f)$  on lineaarikuvaus.