11 Determinantti

Matriisin determinantti on reaaliluku, joka kertoo matriisin ominaisuuksista. Determinantti on kätevä työkalu esimerkiksi silloin, kun halutaan tietää, onko matriisi kääntyvä. Monet determinanttiin liittyvistä todistuksista ovat kuitenkin niin työläitä, että ne sivuutetaan tässä.

Määritelmä 11.1. Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

a) Jos $n = 1$, niin $\det(A) = a_{11}$.

b) Muussa tapauksessa

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake.

Matriisin A determinantille voidaan käyttää merkintää

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Esimerkki 11.2. Matriisin $A = [4]$ determinantti on $\det(A) = 4$. Matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

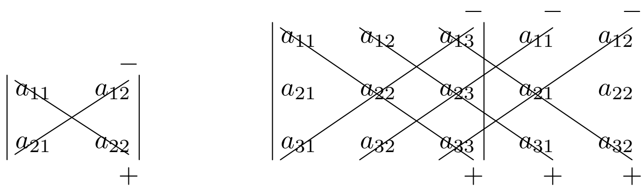
determinantti on puolestaan

$$\det(B) = 1 \cdot \det([4]) - (-1) \cdot \det([2]) = \det([4]) + \det([2]) = 4 + 2 = 6.$$

Määritelmän mukaan 2×2-matriisin determinantti lasketaan seuraavasti:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Sen laskemiseen voi käyttää kuvassa 11.23 esitettyä muistisääntöä. Piirretään matriisin poikki vinoviivat. Samalla viivalla olevat alkiot kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki ja muutoin miinusmerkki. Lopuksi tulot summataan.



Kuva 11.23: Muistisäännöt 2×2-determinantin ja 3×3-determinantin laskemiseksi.

Esimerkki 11.3. Matriisin

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det(C) &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (4+2) - 3 \cdot (0+1) + 2 \cdot (0-1) \\ &= -2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -17. \end{aligned}$$

Määritelmän mukaan 3×3-matriisin determinantti lasketaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Tällekin determinantille on olemassa laskemista helpottava muistisääntö (ks. kuva 11.23). Kirjoitetaan matriisin vierelle matriisin ensimmäinen ja toinen sarake. Piirretään kuvion päälle matriisin lävistäjän suuntaisia viivoja sekä vastakkaissuuntaisia viivoja. Samalla viivalla olevat alkiot kerrotaan keskenään. Jos viiva on lävistäjän suuntainen, tulee tulon eteen plusmerkki. Jos viiva on vastakkaissuuntainen, tulee tulon eteen miinusmerkki. Lopuksi tulot lasketaan yhteen.

Lauseen 9.10 nojalla 2×2-matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, jos ja vain jos $ad - bc \neq 0$. Toisaalta matriisin A determinantti on $ad - bc$. Matriisi A on siis kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$. Samanlainen tulos pätee kaikille matriiseille. Sen osoittaminen on työlästä ja jätetään siksi väliin.

Lause 11.4. *Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos* $\det(A) \neq 0$.

11.1 Determinantin kehityskaavat

Determinantin määritelmässä olevat kertoimet otetaan matriisin ensimmäiseltä riviltä. Sanotaan, että determinantti on tällöin kehitetty ensimmäisen rivin suhteen. Yhtä hyvin voidaan käyttää muita rivejä tai jopa muita sarakkeita.

Lause 11.5. *Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Merkitään $A(i,j) = a_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*

a) Olkoon $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake. Kyseessä on kehitys rivin i suhteen.

b) Olkoon $j \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake. Kyseessä on kehitys sarakkeen j suhteen.

Toisinaan voi säästää vaivaa, jos valitsee viisaasti rivin tai sarakkeen, jonka suhteen determinantin kehittää. Lasketaan matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

determinantti kehittämällä se aluksi kolmannen rivin ja sitten kolmannen sarakkeen suhteen:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \left(0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= - \Big(0 + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) \Big) = -(0 - 3 - 1) = 4
\end{aligned}$$

Kehityskaavojen plus- ja miinusmerkkien vaihtelu (eli kaavoissa oleva kerroin $(-1)^{i+j}$) saadaan shakkilautaa muistuttavasta kuviosta:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Matriisin tilalle ajatellaan plus- ja miinusmerkeistä koostuva ruudukko, jonka vasemmassa yläkulmassa on plusmerkki. Jos matriisin alkion kohdalla on plusmerkki, tulee kehityskaavassa alkion eteen plusmerkki. Vastaavasti, jos alkion kohdalla on miinusmerkki, tulee kehityskaavaankin miinusmerkki. Huomaa, että alkion oma etumerkki säilyy joka tapauksessa.

11.2 Determinantin ominaisuuksia

Lause 11.6. *Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$-matriiseja. Tällöin*

a) $\det(A^T) = \det(A)$

b) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Lause 11.7. *Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Todistus. Oletuksen mukaan matriisi A on kääntyvä, joten sillä on käänteismatriisi A^{-1}. Lauseen 11.6 kohdan b) nojalla

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Toisaalta lauseen 11.4 mukaan $\det(A) \neq 0$, sillä A on kääntyvä. Siten $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. □

Seuraava lause kertoo, miten alkeisrivitoimitusten tekeminen vaikuttaa matriisin determinanttiin.

Lause 11.8. *Oletetaan, että A on neliömatriisi.*

1) Jos matriisi B saadaan matriisista A vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin $\det(B) = -\det(A)$.

2) Jos matriisi B saadaan matriisista A kertomalla jokin rivi reaaliluvulla $t \neq 0$, niin $\det(B) = t\det(A)$.

3) Jos matriisi B saadaan matriisista A lisäämällä johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla k kerrottuna, niin $\det(B) = \det(A)$.

Lauseen 11.6 kohdasta a) seuraa, että determinantin sarakkeet käyttäytyvät täsmälleen samalla tavalla kuin sen rivit. Lauseesta 11.8 saadaan siis seuraavat muistisäännöt:

1) Jos matriisin kaksi riviä (saraketta) vaihtaa keskenään, niin determinantin etumerkki muuttuu:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

2) Jos matriisin rivillä (sarakkeessa) kaikilla alkioilla on yhteinen tekijä, niin tuon yhteisen tekijän voi ottaa determinantin eteen kertoimeksi:
$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

3) Jos matriisin riviin (sarakkeeseen) lisätään jokin toinen rivi (sarake) vakiolla kerrottuna, niin matriisin determinantti ei muutu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Joidenkin matriisien determinantti on helppo määrittää.

Lause 11.9. *Oletetaan, että A on neliömatriisi. Tällöin*

1) *jos matriisissa A on nollarivi (nollasarake), niin* $\det(A) = 0$
2) *jos matriisissa A on kaksi samaa riviä (samaa saraketta), niin* $\det(A) = 0$
3) *jos A on kolmiomatriisi (eli kaikki lävistäjän alapuoliset tai yläpuoliset alkiot ovat nollia), niin matriisin A determinantti on lävistäjäalkioiden tulo.*

Todistus. Kohdat 1 ja 3 voidaan todistaa käyttämällä kehityskaavoja. Kohta 2 palautuu kohtaan 1 käyttämällä lauseen 11.8 kohtaa 3. $\square$

Esimerkiksi
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 = 108 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 8 \cdot 9 = 0.$$