5 Lineaariset yhtälöryhmät

Lineaarinen yhtälöryhmä on yhtälöryhmä, joka on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

missä $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Symbolit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat yhtälöiden tuntemattomia. Lukuja $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nimitetään yhtälöryhmän *kertoimiksi* ja lukuja $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *vakioiksi*. Jos tuntemattomia on vähän, niitä merkitään yleensä symboleilla x, y, z ja niin edelleen.

Esimerkiksi

$$\begin{cases} -4x_1 & + & \sqrt{3}x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & + & \frac{6}{8}x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & \sqrt{2}x_2 & + & 11x_3 & = & -3 \\ & - & 6x_2 & - & 32x_3 & = & 4 \end{cases}$$

on lineaarinen yhtälöryhmä.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen merkitsee sitä, että löydetään kaikki ne luvut, jotka tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ paikalle sijoitettuina toteuttavat yhtä aikaa kaikki yhtälöt.

Lineaarisessa yhtälöryhmässä oleellisia ovat vain kertoimet ja vakiot. Kaikki tieto yhtälöryhmästä voidaankin tiivistää lukutaulukkoon eli *matriisiin*, jossa luetellaan kaikki kertoimet sekä vakiot. Kun käsitellään yhtälöryhmien sijasta matriiseja, on kirjoittevaa paljon vähemmän, sillä tuntemattomia ei tarvitse kirjata ylös.

Esimerkiksi edellä esitellyn yhtälöryhmän matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & \sqrt{3} & 2 & 4 \\ 1 & 0 & \frac{6}{8} & 0 \\ 5 & \sqrt{2} & 11 & -3 \\ 0 & -6 & -32 & 4 \end{array}\right].$$

Selkeyden vuoksi kertoimet on tapana erottaa vakioista pystyviivalla. Huomaa, että matriisiin on kirjoitettava nolla niiden termien kohdalle, jotka puuttuvat yhtälöryhmästä. Kyseisten termien kertoimena on nimittäin nolla.

Kappaleessa 8 tutustutaan matriisien teoriaan yleisemmin. Tässä luvussa käsittelemme vain yhtälöryhmistä saatuja matriiseja.

5.1 Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Seuraavaksi käydään läpi menetelmä, jolla voidaan ratkaista mikä tahansa lineaarinen yhtälöryhmä. Ideana on muokata yhtälöryhmästä uusia yhtälöryhmiä, joilla on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä. Viimeisenä saatu yhtälöryhmä on helppo ratkaista. Koska viimeisen yhtälöryhmän ratkaisut ovat samat kuin alkuperäisen yhtälöryhmän, on alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisut löydetty.

Määritelmä 5.1. Yhtälöryhmiä kutsutaan ekvivalenteiksi, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

Ryhdymme muokkaamaan yhtälöryhmiä niin kutsutuilla alkeisrivitoimituksilla. Niiden avulla tuotetaan uusia yhtälöryhmiä, jotka ovat ekvivalentteja alkuperäisen yhtälöryhmän kanssa. Koska matriisien käsitteleminen on helpompaa kuin yhtälöryhmien, tehdään alkeisrivitoimitukset matriiseille.

Määritelmä 5.2. Seuraavat kolme operaatiota ovat *alkeisrivitoimituksia*:

1. Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.

2. Kerrotaan jokin rivi nollasta poikkeavalla reaaliluvulla.

3. Lisätään johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Alkeisrivitoimituksille käytetään tässä materiaalissa seuraavia lyhennysmerkintöjä

- $R_i \leftrightarrow R_j$: vaihdetaan rivien i ja j paikat $(i \neq j)$.
- aR_i: kerrotaan rivi i luvulla $a \neq 0$.
- $R_i + bR_j$: lisätään riviin i rivi j luvulla b kerrottuna $(i \neq j)$.

Esimerkki 5.3. Seuraavassa on annettu esimerkit erilaisista alkeisrivitoimituksista:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Määritelmä 5.4. Matriisi A on *riviekvivalentti* matriisin B kanssa, jos B saadaan matriisista A alkeisrivitoimituksilla.

Esimerkiksi edellisen esimerkin matriisit

$$\left[\begin{array}{rr|r} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \quad \text{ja} \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

ovat riviekvivalentit. Alkeisrivitoimituksia voidaan ajatella tehtävän myös nolla kappaletta. Siten jokainen matriisi on itsensä kanssa riviekvivalentti.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \underset{\text{toimituksia}}{\overset{\text{alkeisrivi-}}{\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \underset{\text{ratkaisut}}{\overset{\text{samat}}{\longleftarrow \quad \longrightarrow}} \begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Kuva 5.16: Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmän perusta.

Lause 5.5. *Jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit.*

Lause voidaan muotoilla myös toisin: jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalenit, yhtälöryhmillä on täsmälleen samat ratkaisut. Alkeisrivitoimituksen tekeminen ei siis muuta yhtälöryhmän ratkaisuja. Lauseen todistus on esitetty luvun lopussa.

Yhtälöryhmää ratkaistaessa on tavoitteena muuttaa yhtälöryhmän matriisi alkeisrivitoimituksilla niin kutsutuksi redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut on helppo nähdä. Tutustutaan aluksi porrasmatriiseihin ja siirrytään sitten tutkimaan redusoituja porrasmatriiseja.

Määritelmä 5.6. Matriisi on *porrasmatriisi*, jos

1. mahdolliset nollarivit ovat alimpina.
2. kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio (eli *johtava alkio*) on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat porrasmatriiseja. Niiden johtavat alkiot on lihavoitu.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{14} & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{-3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & -41 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Määritelmä 5.7. Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos

1. se on porrasmatriisi.
2. jokaisen rivin johtava alkio on 1.
3. jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

Esimerkiksi seuraavat matriisit ovat redusoituja porrasmatriiseja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -53 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esimerkki 5.8. Matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

on redusoitu porrasmatriisi. Sitä vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 4 \\ \qquad x_2 \qquad = -2 \\ \qquad\qquad x_3 = 3. \end{cases}$$

Huomataan, että yhtälöryhmästä näkyy suoraan sen ratkaisu, joka on

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Ratkaisut on helppo nähdä juuri sen vuoksi, että yhtälöryhmän matriisi on redusoitu porrasmatriisi.

Tavoitteena on siis muuttaa yhtälöryhmän matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta ratkaisut näkyvät suoraan. Voidaan osoittaa, että mikä tahansa matriisi voidaan muuttaa alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi. Seuraava esimerkki näyttää, kuinka tämä tehdään.

Esimerkki 5.9. Tutkitaan matriisia

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ja muutetaan se redusoiduksi porrasmatriisiksi. Aloitetaan ensimmäisestä sarakkeesta. Vaihtamalla ensimmäisen ja toisen rivin paikat, saadaan ensimmäisen rivin johtavaksi alkioksi 1:

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen johtavan alkion alla olevat alkiot on helppo muuttaa nolliksi. Vähennetään ensin toisesta rivistä ensimmäinen rivi luvulla 2 kerrottuna:

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lisätään sitten kolmanteen riviin ensimmäinen rivi luvulla 1 kerrottuna:

$$\xrightarrow{R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nyt ensimmäinen sarake on halutussa muodossa. Siirrytään muokkaaman toista saraketta. Muutetaan ensin sen johtava alkio ykköseksi, jotta voidaan toimia samoin kuin edellä. Kerrotaan siis toinen rivi luvulla -1. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{-1\cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Toisen rivin johtavan alkion avulla voidaan muuttaa sen alla oleva alkio nollaksi. Lisätään kolmanteen riviin toinen rivi luvulla 2 kerrottuna. Saadaan matriisi

$$\xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

joka on porrasmatriisi.

Jatketaan muokkaamista niin, että saadaan aikaan redusoitu porrasmatriisi. Muutetaan ensin kaikki johtavat alkiot ykkösiksi:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Muutetaan alimman rivin johtavan alkion avulla kaikki kolmannen sarakkeen muut alkiot nolliksi:

$$\xrightarrow{R_2-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Näin saatu matriisi on redusoitu porrasmatriisi.

Saatu redusoitu porrasmatriisi on eri matriisi kuin se, josta lähdettiin liikkeelle. Matriisit myös vastaavat erilaisia yhtälöryhmiä. Näillä yhtälöryhmillä on kuitenkin samat ratkaisut.

Ohjeita redusoidun porrasmatriisin aikaansaamiseksi:

- Porrasmatriisia muodostetaan vasemmalta oikealle ja ylhäältä alaspäin.
- Johtavat alkiot kannattaa useimmiten muuttaa ykkösiksi.
- Johtavien alkioiden avulla muutetaan niiden alapuolella olevat alkiot nolliksi. Näin saadaan aikaan porrasmatriisi.

- Redusoitua porrasmatriisia muodostetaan oikealta vasemmalle ja alhaalta ylöspäin.
- Johtavien alkioiden avulla muutetaan niiden yläpuolella olevat alkiot nolliksi.
- Tee vain yksi alkeisrivitoimitus kerrallaan!

Gaussin-Jordanin menetelmä

Nyt olemme valmiita ottamaan käyttöön niin kutsutun Gaussin-Jordanin menetelmän, jonka avulla lineaariset yhtälöryhmät voidaan aina ratkaista.

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Esimerkki 5.10. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3. \end{cases}$$

Sen matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Tämä matriisi muutettiin redusoituksi porrasmatriisiksi esimerkissä **??**:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Redusoitua porrasmatriisia vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -1 \\ & x_2 & & = & -1 \\ & & x_3 & = & 1. \end{cases}$$

Koska alkuperäisen yhtälöryhmän ratkasut ovat lauseen 5.5 nojalla samat kuin lopuksi saadun yhtälöryhmän, on yhtälöryhmä ratkaistu. Sen ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 1. \end{cases}$$

Esimerkki 5.11. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3x - 6y - 3z = -21. \end{cases}$$

Muutetaan sen matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ -3 & -6 & -3 & -21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+3R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Vastaava yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 0 = 3. \end{cases}$$

Alin yhtälö on aina epätosi, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Esimerkki 5.12. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 15x_3 = 9 \\ x_1 \qquad - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Muutetaan sen matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & -15 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1\cdot R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Saatua matriisia vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Alin yhtälö $0 = 0$ on aina tosi. Tuntemattomalle x_3 ei puolestaan aseteta mitään rajoitteita, joten se voi olla mikä tahansa reaaliluku. Sanotaan, että x_3 on *vapaa* *muuttuja*. Merkitään $x_3 = t$, missä $t \in \mathbb{R}$. Ratkaistaan vielä muut tuntemattomat. Ylin yhtälö saadaan muotoon $x_1 - 2t = 1$, joten $x_1 = 1 + 2t$. Toinen yhtälö puolestaan on $x_2 - t = 2$ eli $x_2 = 2 + t$. Siten yhtälön ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = t, \end{cases}$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Ratkaisuja on siis äärettömän monta. Esimerkiksi $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ ja $x_3 = 1$ sekä $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = -1$ ovat yhtälöryhmän ratkaisuja. Jokaisella reaaliluvulla t yhtälöryhmälle saadaan eri ratkaisu.

Huomaa, että vapaat muuttujat näkyvät redusoidussa porrasmatriisissa sarakkeina, joissa ei ole lainkaan johtavaa alkiota.

Esimerkki 5.13. Lineaarisen yhtälöryhmän matriisi muutettiin alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Mikä on yhtälöryhmän ratkaisu?

Havaitaan, että johtavat alkiot ovat sarakkeissa 1, 3 ja 6. Muita sarakkeita vastaavat tuntemattomat x_2, x_4 ja x_5 ovat vapaita muuttujia. Merkitään $x_2 = r$, $x_4 = s$ ja $x_5 = t$, missä $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$.

Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} x_1 + 3r + 4s = 7 \\ \qquad x_3 + 2s = 0 \\ \qquad\qquad x_6 = 3 \end{cases}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_3 = -2s \\ x_6 = 3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 3r - 4s \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s \\ x_4 = s \\ x_5 = t \\ x_6 = 3, \end{cases}$$

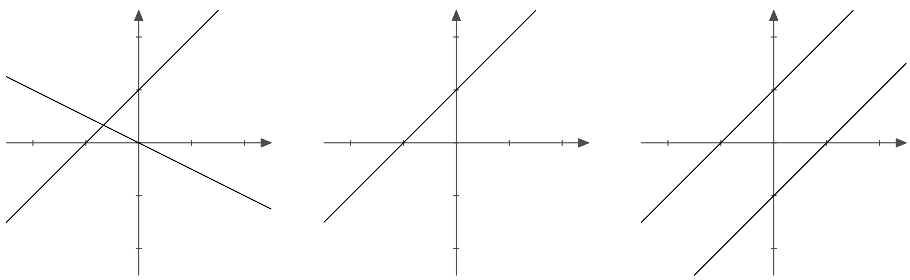
missä $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Esimerkeistä huomataan, että yhtälöryhmällä voi olla täsmälleen yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua. Kun muuttujia on kaksi, tilannetta voi havainnollistaa kuvan avulla. Tutkitaan yhtälöparia

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Oletetaan, että yhtälöllä on ratkaisu $x = r$, $y = s$. Sitä voidaan ajatella tason pisteenä (r, s). Koska ratkaisu toteuttaa ensimmäisen yhtälön, piste (r, s) on suoralla, jonka yhtälö on $ax + by = c$. Samoin piste (r, s) on suoralla, jonka yhtälö on $dx + ey = f$. Piste (r, s) on siis molemmilla suorilla, eli se on suorien leikkauspiste.

Jos yhtälöt määrittävät kaksi erisuuntaista suoraa, on niillä on täsmälleen yksi leikkauspiste. Tällöin yhtälöparilla on täsmälleen yksi ratkaisu. Jos yhtälöt määrittävät saman suoran, on leikkauspisteitä äärettömän monta. Silloin ratkaisujakin on äärettömän monta. Jos yhtälöiden määrittämät suorat eivät ole samat mutta ovat kuitenkin yhdensuuntaiset, ei leikkauspisteitä ole. Silloin ei myöskään yhtälöparilla ole ratkaisuja.



Kuva 5.17: Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua.

Esimerkki 5.14. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = -2\,. \end{cases}$$

Tutkitaan, miten luvun k arvot vaikuttavat ratkaisujen lukumäärään. Ryhdytään muuttamaan yhtälöryhmän matriisia redusoiduksi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-kR_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right]$$

Kaikki alkeisrivitoimitukset voidaan tähän asti tehdä riippumatta siitä, mikä luku k on. Jatkaminen ei kuitenkaan onnistu, sillä toisen rivin alkio $k-1$ saattaa olla nolla, samoin kolmannen rivin alkio $2-k-k^2$. Tarkastellaan näitä tapauksia erikseen.

Oletetaan ensin, että kolmannen rivin alkio $2-k-k^2=0$ eli $k=-2$ tai $k=1$.

- Jos $k=-2$, viimeinen matriisi on

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö $0=0$ on aina tosi. Lisäksi tuntematonta x_3 vastaavassa sarakkeessa ei ole johtavaa alkiota, joten x_3 on vapaa muuttuja. Ratkaisuja on siten äärettömän monta.

- Jos $k=1$, viimeinen matriisi on

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

  Havaitaan, että alinta riviä vastaava yhtälö $0=-3$ on aina epätosi. Siten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Oletetaan sitten, että toisen rivin alkio $k-1=0$ eli $k=1$. Tämä tapaus käsiteltiin sattumalta jo edellä.

Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta, jossa sekä toisen rivin alkio $k-1$ että kolmannen rivin alkio $2-k-k^2$ ovat nollasta poikkeavia. Tällöin voidaan jatkaa alkeisrivitoimitusten tekemistä. Koska $k-1\neq 0$ ja $2-k-k^2\neq 0$ saadaan

$$\xrightarrow{\frac{1}{k-1}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2-k-k^2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (-2-k)/(2-k-k^2) \end{array}\right].$$

Tällöin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Päädyttiin siis seuraavaan tulokseen: Yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua, jos ja vain jos $k=-2$. Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, jos ja vain jos $k=1$. Yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu, jos ja vain jos $k\neq 1$ ja $k\neq -2$.

Käydään vielä lopuksi läpi lauseen 5.5 todistus, joka sivuutettiin luvun alussa.

Todistus. Osoitetaan, että jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit. Tätä varten riittää näyttää, että alkeisrivitoimituksen tekeminen ei vaikuta yhtälöryhmän ratkaisuihin. Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right. \tag{1}$$

missä $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.

1. Ensinnäkin huomataan, että yhtälöryhmän rivien järjestyksellä ei ole väliä. Siten kahden rivin paikkojen vaihtaminen ei muuta yhtälöryhmän ratkaisuja.

2. Tutkitaan sitten alkeisrivitoimitusta, joka kertoo rivin i luvulla $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tuloksena on yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ ca_{i1}x_1 & + & ca_{i2}x_2 & + & \cdots & + & ca_{in}x_n & = & cb_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right. \tag{2}$$

On osoitettava, yhtälöryhmillä (1) ja (2) on samat ratkaisut. Tämä tehdään kahdessa osassa. Ensin näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (1) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu. Sitten näytetään, että jokainen yhtälöryhmän (2) ratkaisu on myös yhtälöryhmän (1) ratkaisu.

Oletetaan ensin, että $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$ on yhtälöryhmän (1) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (2) ratkaisu. Oletuksen perusteella pätee

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}r_1 & + & a_{12}r_2 & + & \cdots & + & a_{1n}r_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{i1}r_1 & + & a_{i2}r_2 & + & \cdots & + & a_{in}r_n & = & b_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}r_1 & + & a_{m2}r_2 & + & \cdots & + & a_{mn}r_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

Kun i:nnen yhtälön molemmat puolet kerrotaan luvulla c, saadaan yhtälö

$$ca_{i1}r_1 + \cdots + ca_{in}r_n = cb_i.$$

Nyt siis $x_1 = r_1, \dots x_n = r_n$ toteuttaa yhtälöryhmän (2), ja siten se on myös yhtälöryhmän (2) ratkaisu.

Oletetaan sitten, että $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ on yhtälöryhmän (2) ratkaisu ja osoitetaan, että se on myös ryhmän (1) ratkaisu. Nyt siis

$$\begin{cases} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \cdots & + & a_{1n}s_n & = & b_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ ca_{i1}s_1 & + & ca_{i2}s_2 & + & \cdots & + & ca_{in}s_n & = & cb_i \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}s_1 & + & a_{m2}s_2 & + & \cdots & + & a_{mn}s_n & = & b_m. \end{cases}$$

Koska $c \neq 0$, voidaan i:nnen yhtälön molemmat puolet jakaa luvulla c. Tällöin saadaan yhtälö $a_{i1}s_1 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$. Nyt nähdään, että $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ toteuttaa myös yhtälöryhmän (1), joten se on myös yhtälöryhmän (1) ratkaisu. Siten yhtälöryhmillä on samat ratkaisut.

3. Kolmannen alkeisrivitoimituksen tarkastelu jätetään lukijalle.

$\square$

6 Virittäminen

Palataan sitten avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuksiin. Palautetaan mieleen, että vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä aliavaruus on joukko

$$\mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt osaamme vastata esimerkissä 4.5 esitettyyn kysymykseen. Esimerkissä haluttiin tietää, kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Tällöin päädyttiin yhtälöryhmään

$$\begin{cases}   2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Kun yhtälöryhmä ratkaistaan Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä, nähdään, että ratkaisuja ei ole. Siten $\bar{w} \notin \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Esimerkki 6.1. Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että

$$\mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2.$$

Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko. Tiedetään, että jokainen joukon $\mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ vektori on avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori, joten on selvää, että $\mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) \subset \mathbb{R}^2$. Näin ollen riittää näyttää, että $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. On siis osoitettava, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori voidaan esittää vektoreiden $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ lineaarikombinaationa.

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\bar{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2,$$

joten $\bar{v} \in \mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Siten $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. On siis osoitettu, että $\mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2$.

Esimerkki 6.2. Tutkitaan, millä ehdolla vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kuuluu vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (3, 2, -1), \quad \bar{v}_2 = (2, -2, 6) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (3, 4, -5)$$

virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Jotta vektori $\bar{w}$ olisi vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, täytyy olla olemassa luvut x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}.$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & w_1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & w_2 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & w_3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisista saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -6 & 5 & -w_3 \\ 0 & 10 & -6 & w_2 + 2w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 - 2w_2 - w_3 \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, jos ja vain jos alinta riviä vastaava yhtälö $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = w_1 - 2w_2 - w_3$ on tosi eli $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$. Siten vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ on aliavaruudessa $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$, jos ja vain jos $w_1 - 2w_2 - w_3 = 0$.

Nyt aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ voidaan kirjoittaa uudessa muodossa:

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 - 2w_2 - w_3 = 0\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \mid w_3 = w_1 - 2w_2\} \\ &= \{(w_1, w_2, w_1 - 2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(w_1, 0, w_1) + (0, w_2, -2w_2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{w_1(1, 0, 1) + w_2(0, 1, -2) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Kyseessä on siis vektorien $(1, 0, 1)$ ja $(0, 1, -2)$ virittämä aliavaruus. Toisin sanottuna

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \operatorname{span}((1, 0, 1), (0, 1, -2)).$$

Eri vektorit voivat siis virittää saman aliavaruuden. Edes virittäjävektorien määrän ei tarvitse olla sama.

Esimerkki 6.3. Tutkitaan, virittävätkö vektorit

$$\bar{u}_1 = (1, 1, 0), \quad \bar{u}_2 = (1, 0, 1), \quad \bar{u}_3 = (0, 1, 1) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_4 = (-2, 1, 1)$$

avaruuden $\mathbb{R}^3$. Oletetaan, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. On selvitettävä, onko olemassa lukuja $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 = \bar{w}.$$

Saadaan yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Tästä saadaan alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(w_3 + w_2 - w_1) \end{array}\right].$$

Matriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja olivat w_1, w_2 ja w_3 mitä lukuja tahansa. Siten $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$. Näin ollen $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$.

Edellisen esimerkin virittäjät $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ eivät ole parhaat mahdolliset. Koska yhtälöryhmässä on vapaita muutujia, on yhtälöryhmällä äärettömän monta ratkaisua. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ alkiot voidaan siis kirjoittaa *usealla* eri tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Esimerkiksi jos $\bar{w} = (1, 2, 3)$, niin ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = 2 - 2t \\ x_4 = t\,, \end{cases}$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $t = 3$ saadaan

$$(1, 2, 3) = 3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - 4\bar{u}_3 + 3\bar{u}_4$$

ja toisaalta valitsemalla $t = 1$ saadaan

$$(1, 2, 3) = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 0\bar{u}_3 + \bar{u}_4.$$

Tämä ei ole toivottavaa, vaan tavoitteena on löytää sellainen virittäjäjoukko, että aliavaruuden vektorit voidaan ilmaista virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Tällaisia virittäjäjoukkoja tutkitaan seuraavassa luvussa.

7 Vapaus

Määritelmä 7.1. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

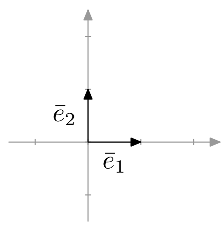
Jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa eli lineaarisesti riippumaton, voidaan myös sanoa, että vektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*.

Tulemme näkemään, että jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, voidaan aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkiot kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien lineaarikombinaatioina. Virittäjien joukossa ei siis ole tarpeettomia vektoreita.

Esimerkki 7.2. Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on lineaarisesti riippumaton. Oletetaan, että reaaliluvut c_1 ja c_2 ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 = \bar{0}.$$

Nyt $c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$, joten $(c_1, c_2) = (0, 0)$. Siten pätee $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Näin on osoitettu, että jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa.



Kuva 7.18: Jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa.

Esimerkki 7.3. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$ ja $\bar{v}_2 = (-3, -1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa vai sidottu.

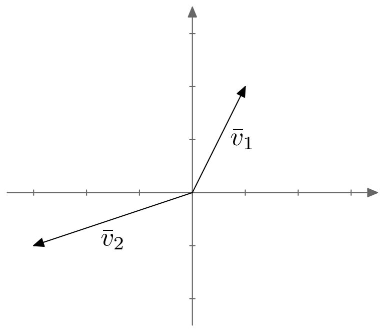
Oletetaan, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = \bar{0}$ joillakin c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Nyt $c_1(1, 2) + c_2(-3, -1) = (0, 0)$ eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä c_1 ja c_2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ainoa ratkaisu on $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on siis vapaa.



Kuva 7.19: Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on vapaa.

Esimerkki 7.4. Kun osoitetaan jono sidotuksi, ei välttämättä tarvitse ratkaista yhtälöryhmää. Toisinaan on nimittäin helppo nähdä millaisten kertoimien avulla lineaarikombinaatiosta muodostuu nollavektori.

Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (-4, -2)$. Huomataan, että

$$2\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = \bar{0}.$$

Siten jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on sidottu.

Esimerkki 7.5. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$, $\bar{v}_2 = (-3, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 1)$. Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa vai sidottu. Oletetaan, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ joillakin c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$. Tällöin $c_1(1, 2) + c_2(-3, -1) + c_3(-1, 1) = (0, 0)$ eli

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan tästä c_1 ja c_2:

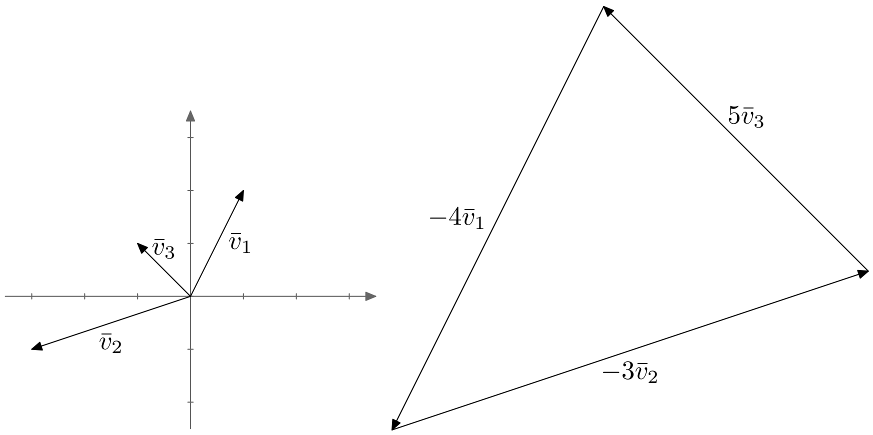
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right].$$

Huomataan, että yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua:

$$\begin{cases} x_1 = -(4/5)t \\ x_2 = -(3/5)t \\ x_3 = t, \end{cases}$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Siten $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ ei ole ainoa ratkaisu. Voidaan valita esimerkiksi $t = 5$, jolloin $c_1 = -4$ ja $c_2 = -3$ ja $c_3 = 5$. Tällöin $-4\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 = \bar{0}$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on siis sidottu. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 7.20.



Kuva 7.20: Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu.

Määritelmän mukaan jonon vapaus kertoo siitä, että nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla jonon vektorien lineaarikombinaationa. Yhtälö

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

toteutuu ainakin, jos kertoimiksi $c_1, \ldots, c_k$ valitaan nollat. Toisinaan yhtälö kuitenkin toteutuu myös joillakin muilla kertoimilla. Jono on vapaa, jos nollavektori voidaan kirjoittaa jonon vektorien lineaarikombinaationa *täsmälleen yhdellä tavalla.*

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ kaikki vektorit voidaan ilmaista täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatioina. Siis jos nollavektori voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa, myös kaikki muut aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ vektorit voidaan kirjoittaa vain yhdellä tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa. Vapaat vektorijonot ovat kiinnostavia nimen omaan sen vuoksi, että niistä saadaan virittäjäjoukko, jossa ei ole turhia vektoreita.

Lause 7.6. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. Muotoa "jos ja vain jos" oleva väite todistetaan kahdessa osassa. Ensin oletetaan väitteen ensimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin jälkimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään usein symbolilla "$\Rightarrow$". Sitten oletetaan jälkimmäisen osan olevan totta ja osoitetaan, että tällöin ensimmäinen osa pätee. Tätä todistuksen vaihetta merkitään symbolilla "$\Leftarrow$". Ryhdytään todistamaan väitettä.

"$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoitetaan, että jokainen aliavaruuden $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Oletetaan, että alkio $w \in W$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$$

ja lineaarikombinaationa

$$\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$$

joillakin $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Nyt $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$, joten

$$a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k - (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k) = \bar{0}.$$

Vektorien yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun ominaisuuksien perusteella pätee

$$(a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k - b_k)\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on oletuksen nojalla vapaa, joten yllä olevasta yhtälöstä seuraa, että sen kaikki kertoimet ovat nollia: $a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_k - b_k = 0$. Siten $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$. Näin ollen tutkitut lineaarikombinaatiot ovatkin välttämättä samat. Siksi vektoria $\bar{w}$ ei voida kirjoittaa usealla eri tavalla virittäjävektoreiden lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että jokainen aliavaruuden $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla virittäjävektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Osoitetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Sitä varten oletetaan, että luvut $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Tiedetään, että ainakin

$$0 \cdot \bar{v}_1 + 0 \cdot \bar{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska vektori $\bar{0}$ on aliavaruuden W alkio, se voidaan kirjoittaa virittäjävektorien lineaarikombinaationa täsmälleen yhdellä tavalla. Siten täytyy päteä $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$. Siis jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. $\square$

Seuraava lause osoittaa, että vektorijono on sidottu, jos ja vain jos jokin sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

Lause 7.7. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ja $k \geq 2$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos*

$$\bar{v}_j \in \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on sidottu. On siis olemassa luvut $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, joilla pätee

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0},$$

ja lisäksi $c_j \neq 0$ jollakin $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Nyt

$$c_j\bar{v}_j = -c_1\bar{v}_1 - \cdots - c_{j-1}\bar{v}_{j-1} - c_{j+1}\bar{v}_{j+1} - \cdots - c_k\bar{v}_k$$

ja edelleen

$$\bar{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\bar{v}_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\bar{v}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\bar{v}_{j+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_j}\bar{v}_k.$$

Siis $\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_k)$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Nyt on olemassa sellaiset $c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, että

$$\bar{v}_j = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Tästä seuraa, että

$$\bar{0} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\bar{v}_{j-1} + (-1)\bar{v}_j + c_{j+1}\bar{v}_{j+1} + \cdots + c_k\bar{v}_k.$$

Koska kerroin -1 ei ole nolla, on jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ sidottu. $\square$

Esimerkki 7.8. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_3 = (0, 0, 2)$ ja $\bar{v}_4 = (3, -1, 0)$. Tällöin esimerkiksi

$$2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + 0\bar{v}_3 - \bar{v}_4 = \bar{0},$$

joten jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ on sidottu. Edellisen lauseen perusteella jokin vektoreista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa. Nähdään, että esimerkiksi

$$\bar{v}_2 = -2\bar{v}_1 + 0\bar{v}_3 + \bar{v}_4.$$

Kaikkia vektoreita ei kuitenkaan välttämättä voida kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa. Esimerkiksi

$$\bar{v}_3 \neq a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_4$$

kaikilla a, b, $c \in \mathbb{R}$. (Tämän todistuksen yksityiskohdat jätetään lukijalle.)

7.1 Homogeeniset yhtälöryhmät ja vapaus

Vektorijonon vapautta tutkittaessa päädytään ratkaisemaan yhtälöryhmiä, joissa vakiot ovat nollia. Tällaista yhtälöryhmää kutsutaan homogeeniseksi.

Määritelmä 7.9. Lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kaikki vakiot ovat nollia, on nimeltään *homogeeninen yhtälöryhmä.*

Homogeeninen yhtälöryhmä on siis muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

missä $a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$. Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina ainakin yksi ratkaisu

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Tätä kutsutaan yhtälöryhmän triviaaliksi ratkaisuksi.

Lause 7.10. *Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on suurempi kuin yhtälöiden määrä m, niin homogeenisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.*

Todistus. Ensinnäkin yhtälöryhmällä on välttämättä ainakin triviaali ratkaisu. Siten ratkaisuja on joko yksi tai äärettömän monta.

Oletuksen mukaan yhtälöryhmän matriisissa on enemmän sarakkeita kuin rivejä. Johtavia alkioita enintään yksi joka rivillä. Koska sarakkeita on enemmän kuin rivejä, on matriisissa ainakin yksi sarake, jossa ei ole johtavaa alkiota. Siten vapaita muuttujia on ainakin yksi, ja yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. □

Korollaari 7.11. *Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$, missä $n \in \{1, 2, \dots\}$. Jos $m > n$, niin jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)$ on sidottu.*

Huom. Korollaari on lause joka seuraa suoraan tai lähes suoraan toisesta lauseesta. Tämä korollaari on lauseen 7.10 seuraus.

Todistus. Merkitään $\bar{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk})$ kaikilla $k \in \{1, \dots, m\}$. Nyt yhtälöä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_m\bar{v}_m = \bar{0}$ vastaavaksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1m}x_m = 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{2m}x_m = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad = \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{nm}x_m = 0. \end{cases}$$

Tässä homogeenisessa yhtälöryhmässä on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä. Siten yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. Koska löytyy muitakin ratkaisuja kuin triviaaliratkaisu, ei jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)$ ole vapaa. □

Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on pienempi tai yhtä suuri kuin yhtälöiden määrä m, ei ratkaisujen määrästä voi äkkiseltään sanoa mitään varmaa. Ratkaisuja voi olla täsmälleen yksi (triviaali ratkaisu) tai äärettömän monta. Jos siis avaruuden $\mathbb{R}^n$ jonon $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ pituus m on *pienempi* kuin n, ei jonon lineaarisesta riippumattomuudesta voida sanoa sen perusteella mitään.