Luku 1

Avaruus $\mathbb{R}^n$

1 Avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektorit

Tässä luvussa käsitellään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Käsiteltävä asia on tuttua koulusta, mutta käytettävät merkinnät ja nimitykset saattavat olla uusia. Jos joukko-opin merkinnät (esim. $\in$, $\subset$, $\setminus$) eivät ole tuttuja, voit katsoa apua kurssisivulla olevasta tiedostosta ”Joukko-opin merkintöjä”.

Määritelmä 1.1. Avaruus $\mathbb{R}^2$ koostuu reaalilukupareista. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ ja } b \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ alkoita kutsutaan *vektoreiksi.*

Huom. Määritelmä tarkoittaa sopimusta. Tässä siis sovitaan, mitä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreilla tarkoitetaan. Määritelmää ei tarvitse perustella millään tavalla.

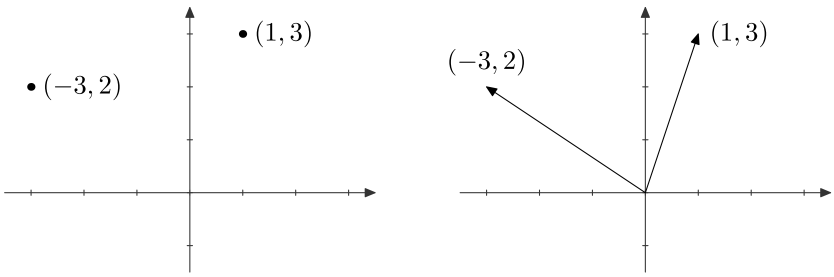
Vektoreita merkitään tässä tekstissä yleensä kirjaimella, jonka päällä on viiva. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa $\bar{v} = (a, b)$. Luvut a ja b ovat vektorin $\bar{v}$ *komponentteja.*

Esimerkki 1.2. Esimerkiksi $\bar{v} = (4, -1)$ ja $\bar{u} = (\frac{1}{2}, -\sqrt{5})$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita. Vektorin $\bar{v}$ komponentit ovat 4 ja -1. Vektorin $\bar{u}$ komponentit ovat puolestaan $\frac{1}{2}$ ja $-\sqrt{5}$.

Tarkalleen ottaen vektori (a, b) on niin kutsuttu järjestetty pari. Tämä tarkoittaa sitä, että lukujen a ja b järjestyksellä on väliä. Esimerkiksi järjestetty pari $(1, 2)$ ei ole sama kuin järjestetty pari $(2, 1)$.

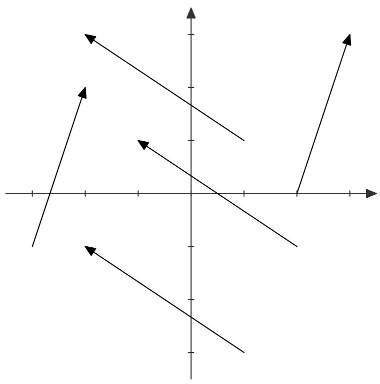
Vektoreita voidaan havainnollistaa koordinaatiston pisteinä. Vektoria (a, b) vastaa piste, jonka vaakakoordinaatti on a ja pystykoordinaatti b. Kuvassa 1.1 on esitetty vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat tason pisteet.

Vektoria (a, b) voi kuvata myös pisteen (a, b) paikkavektorina eli suuntajanana, jonka lähtöpiste on origo ja päätepiste (a, b). Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat paikkavektorit on esitetty kuvassa 1.1.



Kuva 1.1: Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavat tason pisteet sekä samoja vektoreita vastaavat paikkavektorit.

Pisteen ja paikkavektorin lisäksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoria voi havainnollistaa mistä tahansa pisteestä lähtevällä suuntajanana. Kuvassa 1.2 on esitetty vektoria $(1, 3)$ vastaavia suuntajanoja sekä vektoria $(-3, 2)$ vastaavia suuntajanoja.



Kuva 1.2: Vektoreita $(1, 3)$ ja $(-3, 2)$ vastaavia suuntajanoja.

Suuntajanan paikalla ei ole väliä. Ainoastaan sen suunta ja pituus merkitsevät. Vektoria (a, b) vastaavalla suuntajanalla on sama suunta ja pituus kuin pisteen (a, b) paikkavektorilla.

Tällä kurssilla avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori on määritelmänsä mukaan kahdesta reaaliluvusta koostuva järjestetty pari. Vektoreita voidaan kuitenkin havainnollistaa pisteinä, paikkavektoreina ja suuntajanoina. Se, millainen havainnollistamistapa on paras, riippuu siitä, mitä ollaan tekemässä. Usein vektoreita käsitellessä on pystyttävä vaihtamaan sulavasti yhdestä esitystavasta toiseen.

Vektoreille voidaan määritellä erilaisia laskutoimituksia.

Määritelmä 1.3. Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *summa* on vektori

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

Lisäksi vektoreita voidaa kertoa reaaliluvuilla. Tätä operaatiota kutsutaan *skalaarikertolaskuksi.* Jos $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin määritellään

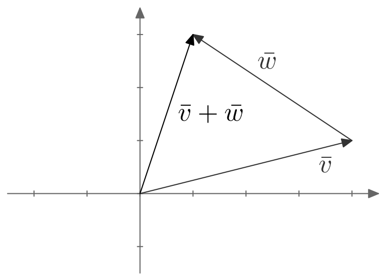
$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2).$$

Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan usein *skalaareiksi*, ja siitä johtuu myös skalaarikertolaskun nimitys.

Esimerkki 1.4. Tarkastellaan vektoreita $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Niiden summa on

$$\bar{v} + \bar{w} = (4 + (-3), 1 + 2) = (1, 3).$$

Yhteenlaskussa vektorien komponentit lasketaan yhteen, ja siksi yhteenlaskua voidaan havainnollistaa geometrisesti (ks. kuva 1.3). Vektorien summa nähdään asettamalla vektorit peräkkäin niin, että jälkimmäinen vektori alkaa siitä, mihin ensimmäinen päättyi. Summavektorin alkupiste on ensimmäisen vektorin alkupiste ja päätepiste jälkimmäisen vektorin päätepiste.



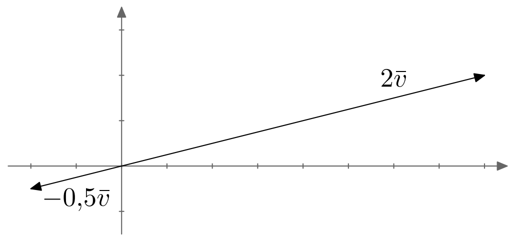
Kuva 1.3: Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ sekä niiden summa $\bar{v} + \bar{w}$.

Tutkitaan sitten skalaarikertolaskua. Määritelmän mukaan

$$2\bar{v} = (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = (8, 2) \quad \text{ja}$$
$$-\frac{1}{2}\bar{v} = (-\frac{1}{2} \cdot 4; -\frac{1}{2} \cdot 1) = (-2; -\frac{1}{2}).$$

Vektorit $2\bar{v}$ ja $-\frac{1}{2}\bar{v}$ on piirretty kuvaan 1.4.

Huomataan, että positiivisella skalaarilla kertominen säilyttää vektorin suunnan ja negatiivisella skalaarilla kertominen kääntää vektorin suunnan vastakkaiseksi.



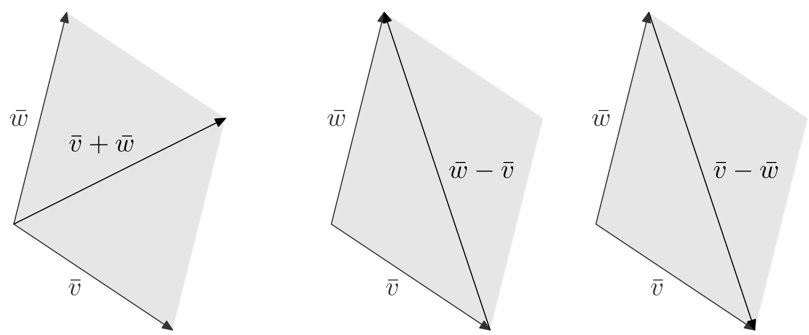
Kuva 1.4: Skalaarimonikerrat $2\bar{v}$ ja $-\frac{1}{2}\bar{v}$.

Määritelmä 1.5. Vektorille $(-1)\bar{v}$ käytetään merkintää $-\bar{v}$. Summalle $\bar{v} + (-\bar{w})$ puolestaan käytetään merkintää $\bar{v} - \bar{w}$. Tätä kutsutaan vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotukseksi.*

Esimerkiksi vektorien $(-1, 6)$ ja $(4, 2)$ erotus on

$$(-1, 6) - (4, 2) = (-1, 6) + (-1)(4, 2) = (-1, 6) + (-4, -2) = (-5, 4).$$

Vektorien erotuksen voi määrittää kuvan perusteella samaan tapaan kuin summan. Nyt vain jälkimmäisen vektorin suunta on käännettävä. Vektorien summaa ja erotusta on havainnollistettu kuvassa 1.5.



Kuva 1.5: Summa $\bar{v} + \bar{w}$ sekä erotukset $\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{w} - \bar{v}$.

Kaikki edellä esitellyt käsitteet voidaan määritellä myös kolmiulotteisessa avaruudessa. Avaruus $\mathbb{R}^3$ on joukko $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Sen alkioita voidaan ajatella avaruuskoordinaatiston pisteinä. Yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään komponenteittain samalla tavalla kuin avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Toisinaan merkitään $\bar{i} = (1, 0)$ ja $\bar{j} = (0, 1)$ tai $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ ja $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Kyseisiä merkintöjä ei juurikaan käytetä tällä kurssilla.

2 Avaruus $\mathbb{R}^n$

Edellisessä luvussa käsiteltiin avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektoreita eli reaalilukupareja ja reaalilukukolmikoita. Näitä avaruuksia voidaan yleistää määrittelemällä avaruus $\mathbb{R}^n$.

Oletetaan, että $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Määritelmä 2.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiot ovat reaaliluvuista koostuvia n-jonoja. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan *vektoreiksi*.

Jos $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, niin lukuja $v_1, v_2, \dots, v_n$ kutsutaan vektorin $\bar{v}$ *komponenteiksi*. Sovimme, että ellei toisin mainita, vektorin $\bar{v}$ komponetteja merkitään symboleilla $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Määritelmä 2.2. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \quad \text{ja}$$

$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2, \dots, cv_n).$$

Ensimmäistä laskutoimitusta nimitetään vektorien *yhteenlaskuksi* ja toista *skalaarikertolaskuksi*. Jos $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$, vektoria $c\bar{v}$ nimitetään vektorin $\bar{v}$ *skalaarimonikerraksi*. Vektorien yhteydessä reaalilukuja kutsutaan usein *skalaareiksi*.

Määritelmä 2.3. Vektorin $\bar{v}$ *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotus* on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$. Vektoria $(0, 0, \dots, 0)$ kutsutaan *nollavektoriksi*. Sille käytetään merkitää $\bar{0}$.

Esimerkki 2.4. Merkitään $\bar{v} = (-5, 3, 0, 1, -1)$ ja $\bar{w} = (-2, -4, 2, 3, 5)$. Tällöin $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^5$ vektoreita. Lasketaan vektorit $2\bar{v} - 3\bar{w}$ ja $-5\bar{v} - \bar{w}$:

$$\begin{aligned} 2\bar{v} - 3\bar{w} &= (-10, 6, 0, 2, -2) - (-6, -12, 6, 9, 15) = (-4, 18, -6, -7, -17) \\ -5\bar{v} - \bar{w} &= (25, -15, 0, -5, 5) - (-2, -4, 2, 3, 5) = (27, -11, -2, -8, 0). \end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille pätevät tutut laskusäännöt.

Lause 2.5. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja a, $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ *(vaihdannaisuus)*
2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ *(liitännäisyys)*
3. $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$
4. $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$
5. $c(\bar{v} + \bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$ *(osittelulaki)*

6. $(a+c)\bar{v} = a\bar{v} + c\bar{v}$ *(osittelulaki)*

7. $a(c\bar{v}) = (ac)\bar{v}$

8. $1\bar{v} = \bar{v}$

Huom. Lause tarkoittaa väitettä, joka voidaan perustella todeksi nojautumalla määritelmiin ja aikaisemmin todeksi osoitettuihin väitteisiin

Todistus. Todistetaan esimerkin vuoksi kohta 1 ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Kirjoitetaan $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, missä $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ ja $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$. Nyt nähdään, että

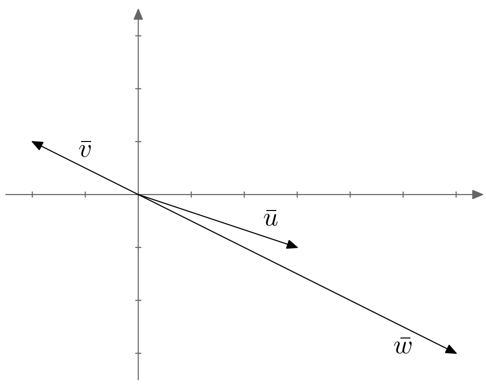
$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \\ &= (w_1 + v_1, w_2 + v_2, \ldots, w_n + v_n) = \bar{w} + \bar{v}.\end{aligned}$$

Tässä käytettiin hyväksi reaalilukujen yhteenlaskun vaihdannaisuutta. Siten väite on todistettu. □

Skalaarikertolaskun avulla voidaan määritellä vektorien yhdensuuntaisuus.

Määritelmä 2.6. Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *yhdensuuntaiset*, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin merkitään $\bar{v} \parallel \bar{w}$.

Esimerkki 2.7. Vektorit $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (6, -3)$ ovat yhdensuuntaiset, sillä $\bar{v} = -(1/3)\bar{w}$. Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u} = (3, -1)$ eivät puolestaan ole yhdensuuntaiset. Jos nimittäin olisi olemassa $r \in \mathbb{R}$, jolle pätisi $\bar{v} = r\bar{u}$, niin $-2 = 3r$ ja $1 = -r$. Ensimmäisen yhtälön mukaan $r = -2/3$, mutta toisen yhtälön mukaan $r = -1$. Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua r, jolle pätee $\bar{v} = r\bar{u}$. Siten vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ eivät ole yhdensuutaiset.



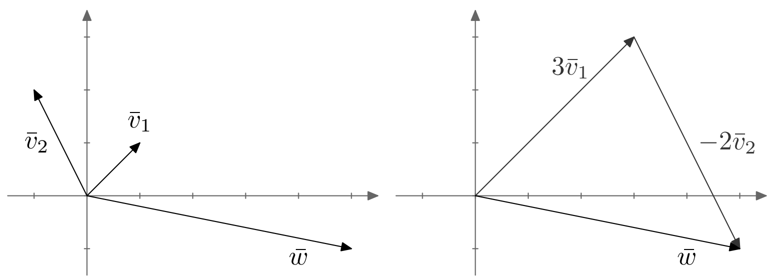
Kuva 2.6: Vektorit $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$.

Määritelmä 2.8. Oletetaan, että $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_k$ *lineaarikombinaatio*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_k$, että

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k.$$

Esimerkki 2.9. Merkitään $\bar{v}_1 = (1,1)$, $\bar{v}_2 = (-1,2)$ ja $\bar{w} = (5,-1)$. Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio, sillä

$$\begin{aligned} 3\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 &= 3(1,1) - 2(-1,2) = (3,3) - (-2,4) \\ &= (5,-1) = \bar{w}. \end{aligned}$$



Kuva 2.7: Vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaatio.

3 Suorat ja tasot

Tässä luvussa käsitellään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suoria ja tasoja vektoreiden näkökulmasta.

3.1 Suora

Määritelmä 3.1. Oletetaan, että $n = 2$ tai $n = 3$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suora* on joukko

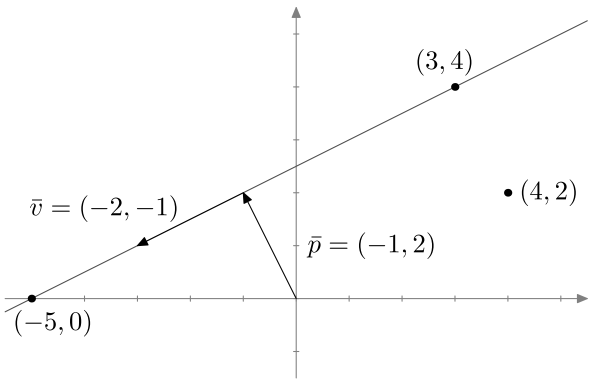
$$\{\bar{p} + k\bar{v} \mid k \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$.

Vektoria $\bar{p}$ kutsutaan suoran *paikkavektoriksi* ja vektoria $\bar{v}$ suoran *suuntavektoriksi.*

Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora. Jos $(a, b) \in S$, niin sanotaan, että piste (a, b) on suoralla S tai että suora S kulkee pisteen (a, b) kautta. Vastaavia ilmauksia käytetään avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Esimerkki 3.2. Esimerkiksi joukko $S = \{(-1, 2) + k(-2, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}$ on suora. Se on piirretty kuvaan 3.8.

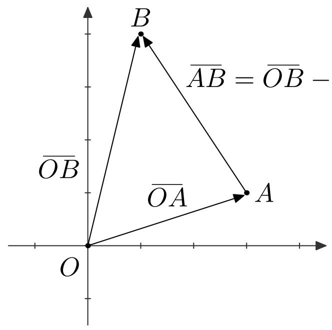


Kuva 3.8: Suora S avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Määritelmän mukaan mikä tahansa suoran S piste voidaan kirjoittaa summana vektorista $\bar{p} = (-1, 2)$ ja jostakin vektorin $\bar{v} = (-2, -1)$ skalaarimonikerrasta. Esimerkiksi $(-5, 0) = \bar{p} + 2\bar{v}$ ja $(3, 4) = \bar{p} - 2\bar{v}$, joten $(-5, 0) \in S$ ja $(3, 4) \in S$. Siis suora S kulkeen pisteiden $(-5, 0)$ ja $(3, 4)$ kautta.

Toisaalta piste $(4, 2)$ ei ole suoralla S. Jos nimittäin $(4, 2) = (-1, 2) + k(-2, -1)$ jollakin $k \in \mathbb{R}$, niin $4 = -1 - 2k$ ja $2 = 2 - k$. Ensimmäisen yhtälön perusteella $k = -5/2$ ja toisen perusteella $k = 0$. Tämä on mahdotonta, joten ei ole olemassa sellaista lukua $k \in \mathbb{R}$, jolle pätee $(4, 2) = (-1, 2) + k(-2, -1)$. Siis $(4, 2) \notin S$.

Ryhdytään seuraavaksi määrittämään suoraa, joka kulkee annettujen pisteiden kautta. Sitä ennen otetaan käyttöön muutama merkintä. Oletetaan, että A ja B ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ pisteitä. Vektori $\overline{AB}$ on vektori, jota vastaavan suuntajanan alkupiste on A ja päätepiste on B. Origoa on tapana merkitä symbolilla O. Siten pisteen A paikkavektorille saadaan merkintä $\overline{OA}$.

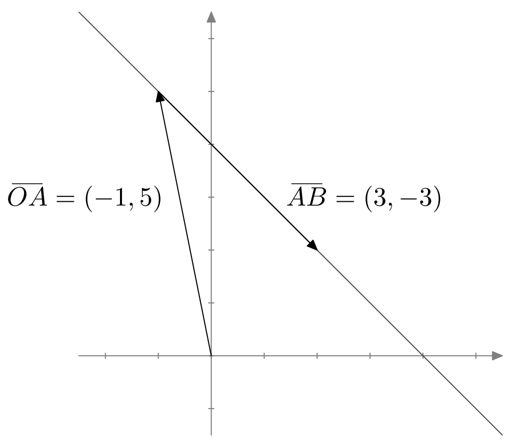


Kuva 3.9: Vektorit $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{AB}$.

Esimerkki 3.3. Tutkitaan, millainen on pisteiden $A = (-1, 5)$ ja $B = (2, 2)$ kautta kulkeva suora. Tätä varten tarvitaan suoralle paikkavektori. Paikkavektoriksi käy minkä tahansa suoran pisteen paikkavektori, esimerkiksi vektori $\overline{OA} = (-1, 5)$. Suuntavektoriksi käy mikä tahansa suoran suuntainen vektori, esimerkiksi vektori

$$\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = (2, 2) - (-1, 5) = (3, -3).$$

Näin saadaan suora $\{(-1, 5) + t(3, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.



Kuva 3.10: Suora $\{(-1, 5) + t(3, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Varmistutaan vielä siitä, että annetut pisteet A ja B todellakin ovat suoralla. Huomataan, että $(-1, 5) = (-1, 5) + 0 \cdot (3, -3)$ ja $(2, 2) = (-1, 5) + (3, -3)$. Siten pisteet A ja B ovat suoralla.

Vastaavalla menetelmällä on aina mahdollista määrittää kahden pisteen kautta kulkeva suora, vaikka asiaa ei sen tarkemmin tässä osoitetakaan.

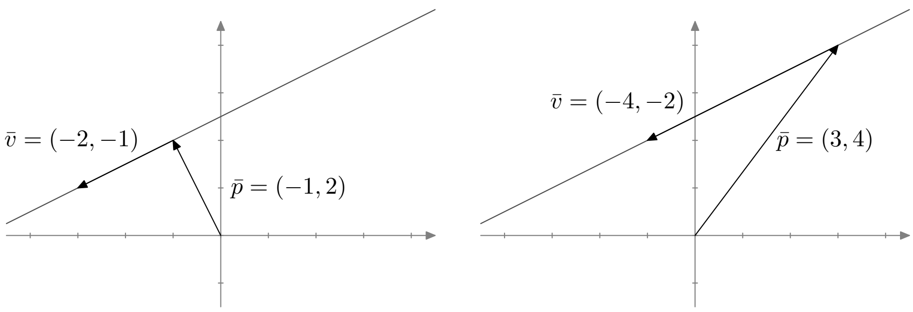
Suoran paikka- ja suuntavektorit eivät ole yksikäsitteisiä, sillä sama suora voidaan kirjoittaa joukkona $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ usealla eri tavalla. Voidaan osoittaa, että

- vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita suoran minkä tahansa pisteen paikkavektori.
- vektoriksi $\bar{v}$ voidaan valita mikä tahansa suoran suuntainen vektori.

Esimerkki 3.4. Esimerkin 3.2 suoralle $S = \{(-1, 2) + k(-2, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}$ on mahdollista valita paikkavektoriksi piste $(3, 4)$ ja suuntavektoriksi vektori $(-4, -2)$. Tällöin S voidaan kirjoittaa muodossa

$$\{(3, 4) + t(-4, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Vaikka tämä joukko onkin äkkiseltään katsottuna erilainen kuin suoran S alkuperäinen määritelmä, on joukoissa täsmälleen samat alkiot. Asiaa on havainnollistettu kuvassa 3.11.



Kuva 3.11: Suoran paikkavektori ja suuntavektori eivät ole yksikäsitteisiä.

Osoitetaan vielä huolellisesti, että joukot $S = \{(-1, 2) + k(-2, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}$ ja $S' = \{(3, 4) + t(-4, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ovat samat. Kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.

"$\subset$": Osoitetaan ensin, että $S \subset S'$. Tämä tehdään näyttämällä, että jokainen joukon S alkio on joukossa S'. Oletetaan, että $\bar{a} \in S$. Nyt $\bar{a} = (-1, 2) + k(-2, -1)$ jollakin $k \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (-1, 2) + k(-2, -1) = (-1, 2) + (-2 + 2 + k)(-2, -1) \\ &= (-1, 2) - 2 \cdot (-2, -1) + (2 + k) \cdot (-2, -1) \\ &= (3, 4) + (2 + k) \cdot (-2, -1) = (3, 4) + \frac{2 + k}{2} \cdot (-4, -2),\end{aligned}$$

missä $(k+2)/2 \in \mathbb{R}$. Siten $\bar{a} \in S'$. Näin on osoitetettu, että $S \subset S'$.

”$\supset$”: Osoitetaan sitten, että $S' \subset S$ eli näytetään, että jokainen joukon S' alkio on joukossa S. Oletetaan, että $\bar{a} \in S'$. Nyt $\bar{a} = (3,4) + t(-4,-2)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} &= (3,4) + t(-4,-2) = (3,4) + (-4,-2) + (t-1) \cdot (-4,-2) \\ &= (-1,2) + (t-1) \cdot (-4,-2) = (-1,2) + 2(t-1) \cdot (-2,-1),\end{aligned}$$

missä $2(t-1) \in \mathbb{R}$. Siten $\bar{a} \in S$. Näin on osoitetettu, että $S' \subset S$.

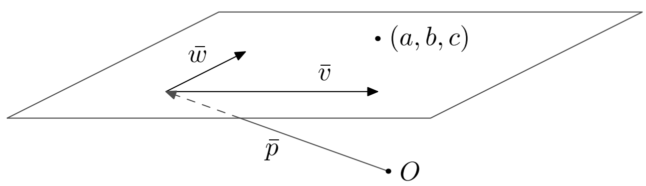
3.2 Taso

Määritelmä 3.5. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *taso* on joukko

$$\{\bar{p} + s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{p} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

Vektoria $\bar{p}$ kutsutaan tason *paikkavektoriksi* ja vektoreita $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ tason *suuntavektoreiksi*. Olkoon T avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso. Jos $(a,b,c) \in T$, niin sanotaan, että piste (a,b,c) on tasossa T tai että taso T kulkee pisteen (a,b,c) kautta.



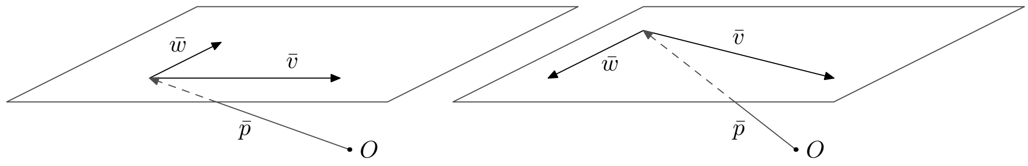
Kuva 3.12: Piste (a,b,c) on tasossa T.

Voidaan osoittaa, että sama taso on mahdollista kirjoittaa usealla eri tavalla joukkona $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$:

- Vektoriksi $\bar{p}$ voidaan valita tason minkä tahansa pisteen paikkavektori.
- Vektoreiksi $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ voidaan valita mitkä tahansa tason suuntaisen vektorit, kunhan $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

Esimerkki 3.6. Määritetään pisteiden $A = (0,1,0)$, $B = (-1,3,2)$ ja $C = (-2,0,1)$ kautta kulkeva taso T. Valitaan ensin tason paikkavektori. Esimerkiksi tason pisteen A paikkavektori $\overline{OA} = (0,1,0)$ käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan tason suuntaiset suuntavektorit:

$$\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = (-1,2,2) \quad \text{ja} \quad \overline{AC} = -\overline{OA} + \overline{OC} = (-2,-1,1).$$



Kuva 3.13: Taso voidaan kirjoittaa eri tavoin joukkona $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Huomaa, että vektorit eivät ole yhdensuuntaiset, sillä $\overline{AB} \neq t\overline{AC}$ kaikilla $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Näin saadaan taso

$$\begin{aligned} T &= \{\, \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} \mid s, t \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, (0,1,0) + s(-1,2,2) + t(-2,-1,1) \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}. \end{aligned}$$

4 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudet

Edellisessä luvussa käsittelimme avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ suoria ja tasoja. Osoittautuu, että erityisesti origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat mielenkiintoisia. Tässä luvussa yleistämme tällaiset suorat ja tasot avaruuteen $\mathbb{R}^n$ ja tutkimme niin kutsuttuja vektoreiden virittämiä aliavaruuksia.

Määritelmä 4.1. Vektoreiden $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *virittämä aliavaruus* on joukko

$$\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Vektoreiden virittämä aliavaruus koostuu siis kaikista vektoreiden lineaarikombinaatioista. Enlannin kielen verbi "span" tarkoittaa virittämistä tai ulottumista.

Esimerkki 4.2. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ suora

$$S = \{\bar{0} + t(-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

on vektorin $(-3,1)$ virittämä aliavaruus. Toisin sanoen $S = \text{span}\big((-3,1)\big)$. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso

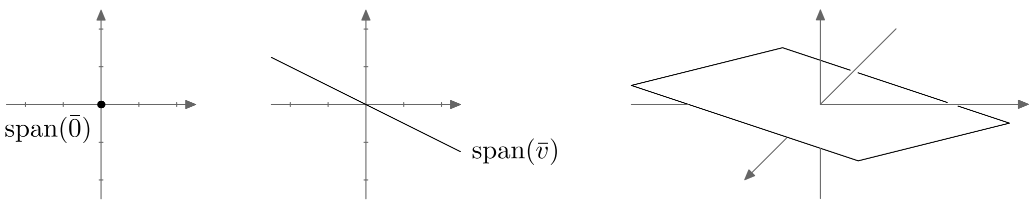
$$T = \{\bar{0} + t(-3,1) + s(2,2) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(-3,1) + s(2,2) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

taas on vektorien $(-3,1)$ ja $(2,2,)$ virittämä aliavaruus, eli $T = \text{span}((-3,1),(2,2))$.

Tutkitaan millaisia vektorien virittämät aliavaruudet voivat olla avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$. Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\text{span}(\bar{0}) = \{a \cdot \bar{0} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\bar{0}\}$. Aliavaruudessa on siis ainoastaan nollavektori.

Oletetaan sitten, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ tai $\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ virittämä aliavaruus $\text{span}(\bar{v}) = \{a\bar{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$ on vektorin $\bar{v}$ suuntainen suora. Tämä suora kulkee origon kautta.

Jos taas $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaisia, vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ virittämä aliavaruus $\text{span}(\bar{v}, \bar{w}) = \{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on taso, joka kulkee origon kautta.



Kuva 4.14: Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\{\bar{0}\}$. Vektorin $\bar{v} \neq \bar{0}$ virittämä aliavaruus on origon kautta kulkeva suora. Kahden vektorin virittämä aliavaruus voi olla origon kautta kulkeva taso.

Vektoreiden virittämän aliavaruus yleistää siis origon kautta kulkevan suoran ja tason käsitteitä. Seuraava esimerkki osoittaa, miksi juuri origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat erityisen kiinnostavia.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan origon kautta kulkevaa suoraa

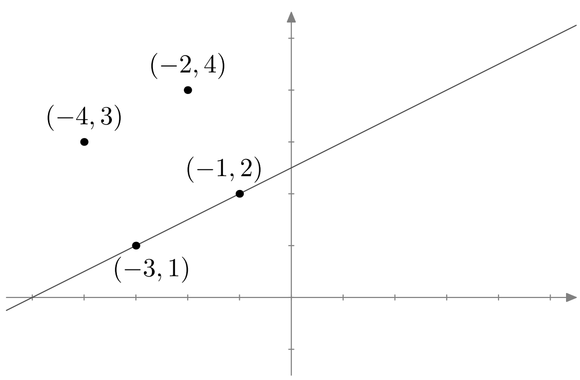
$$S = \mathrm{span}(\bar{v}) = \{k\bar{v} \mid k \in \mathbb{R}\},$$

missä $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$. Jos $\bar{w}$, $\bar{u} \in S$, niin $\bar{w} = a\bar{v}$ ja $\bar{u} = b\bar{v}$ joillakin a, $b \in \mathbb{R}$. Nyt $\bar{w} + \bar{u} = (a + b)\bar{v}$, joten summa $\bar{w} + \bar{u}$ on suoran S alkio. Lisäksi jos $c \in \mathbb{R}$, niin $c\bar{w} = c(a\bar{v}) = (ca)\bar{v}$. Siten kaikkien suoran S alkioiden skalaarimonikerrat ovat edelleen suoran S alkioita. Tavallaan suora S on oma pieni avaruutensa avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisässä, ja siellä voidaan laskea vektoreita yhteen ja kertoa niitä reaaliluvuilla. Sama pätee origon kautta kulkeviin tasoihin.

Tilanne on aivan toinen, jos suora tai taso ei kulje origon kautta. Tutkitaan vaikkapa esimerkin 3.2 suoraa

$$S = \{(-1, 2) + k(-2, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt esimerkiksi $(-1, 2)$ ja $(-3, 1)$ ovat suoralla S. Summa $(-1, 2) + (-3, 1) = (-4, 3)$ ei kuitenkaan ole suoralla S (ks. kuva 4.15). Myöskään skalaarimonikerta $2 \cdot (-1, 2) = (-2, 4)$ ei ole suoralla S.



Kuva 4.15: Esimerkin 3.2 suora S.

Edellä tehdyt havainnot voidaan yleistää minkä tahansa vektoreiden virittämälle aliavaruudelle. Jos aliavaruuden kaksi vektoria lasketaan yhteen, on summa edelleen aliavaruudessa. Samoin aliavaruuden vektoreiden skalaarimonikerrat ovat aliavaruudessa. Lisäksi nollavektori kuuluu aina vektorien virittämään aliavaruuteen.

Lause 4.4. *Oletetaan, että* $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\dots$, $\bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. *Merkitään* $W = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$. *Tällöin* *a) jos $\bar{u}$, $\bar{w} \in W$, niin $\bar{u} + \bar{w} \in W$.*

b) jos $\bar{w} \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin $a\bar{w} \in W$.

c) $\bar{0} \in W$.

Todistus. Osoitetaan kohta a) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{w} \in W$. Nyt $\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$ joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$ joillakin $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{w} &= (a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k) + (b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k) \\ &= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\bar{v}_k. \end{aligned}$$

Siten $\bar{u} + \bar{w} \in W$. □

Esimerkki 4.5. Tutkitaan, kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1), \quad \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \quad \text{ja} \quad \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. On siis selvitettävä, onko olemassa reaalilukuja x_1, x_2, x_3, joille pätee

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$$

eli

$$x_1(0, -1, 2, 1) + x_2(2, 0, 1, -1) + x_3(4, 2, 2, 0) = (-2, 3, 2, -1).$$

Tämä yhtälö voidaan vielä muuttaa muotoon

$$(0, -x_1, 2x_1, x_1) + (2x_2, 0, x_2, -x_2) + (4x_3, 2x_3, 2x_3, 0) = (-2, 3, 2, -1)$$

ja edelleen yhtälöksi

$$(0 + 2x_2 + 4x_3,\ -x_1 + 0 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2 + 0) = (-2, 3, 2, -1).$$

Toisin sanoen on ratkaistava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 +{}} 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Miten tällainen yhtälöryhmä ratkaistaan? Ennen kuin syvennymme vektoreiden virittämiin aliavaruuksiin lisää, on syytä perehtyä yhtälöryhmien ratkaisemiseen.