Vapaan vektorijonon määritelmä

Määritelmän mukaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorijono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee:

jos $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ joillakin $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, niin $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$.

Mitä vapauden määritelmä tarkoittaa?

Mitkä seuraavista ehdoista ilmaisevat saman asian kuin vapauden määritelmä? Toisin sanoen, mitkä niistä ovat yhtäpitäviä vapauden määritelmän kanssa?

a) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$, kun $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$

b) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ vain, jos $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$

c) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ joillakin $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$

d) jos $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$, niin $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$

e) yhtälöllä $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Vastaus:

a) Ei, sillä tämä ehto pätee *kaikille* vektorijonoille.

b) Kyllä.

c) Ei, sillä tämä ehto pätee jälleen *kaikille* vektorijonoille. Voidaan nimittäin valita $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$.

d) Ei, sillä tämä ehto pätee *kaikille* vektorijonoille.

e) Kyllä. Yhtälöllä on aina ratkaisu $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$. Jono on vapaa, jos ja voin jos muita ratkaisuja ei ole.

Kuinka osoittaa, että jono on $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ vapaa?

1. Oleta, että $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ joillakin $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

2. Saat ratkaistavaksesi yhtälöryhmän.

3. Ratkaise se ja totea, että ainoa ratkaisu on $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$. (Itse asiassa yhtälöryhmän täydellinen ratkaiseminen ei ole välttämättä tarpeen. Riittää, pystyt jollakin tavalla päätymään johtopäätökseen $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$.)

Kuinka osoittaa, että jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ ei ole vapaa?

Tapa 1

1. Oleta, että $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ joillakin $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.
2. Saat ratkaistavaksesi yhtälöryhmän.
3. Osoita, että sillä on muitakin ratkaisuja kuin $c_1 = 0$, …, $c_k = 0$.

Tapa 2

Jonon voi osoittaa sidotuksi myös keksimällä kertoimet $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, jotka eivät kaikki ole nollia ja joille pätee $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$. Aina tämä ei tietenkään ole helppoa.