Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

28.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Tarkista ratkaisuehdotuksista vastauksesi. Ratkaisuista on hyötyä myös seuraavien viikkojen tehtäviä tehdessä.
- Pidä luentomateriaali käsillä tehtäviä tehdessä.

Alkeismatriisit

- Matriisi on alkeismatriisi, jos se on saatu ykkösmatriisista yhdellä alkeisrivitoimituksella.
- Alkeismatriisilla kertominen vastaa alkeisrivitoimituksen tekemistä.
- Kaikilla alkeismatriiseilla on käänteismatriisit ja ne ovat myös alkeismatriiseja.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lause 1 (Kääntyvien matriisien lause)

Oletetaan, että A on $n \times n$-neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

a) Matriisi A on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

Käänteismatriisin määrittäminen

- Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin siitä saadaan ykkösmatriisi alkeisrivitoimituksilla.
- On siis olemassa alkeismatriisit $E_1, \ldots, E_k$, joille pätee

$$E_k \ldots E_1 A = I.$$

- Nyt

$$A^{-1} = E_k \ldots E_1 I.$$

- Matriisin A kääntyvyyden selvittäminen ja käänteismatriisin etsiminen voidaan tehdä yhtä aikaa:

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}].$$

Esimerkki

Onko matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4} R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + \frac{5}{2} R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 4R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Esimerkki

Onko matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi?

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Koska matriisi A saatiin muutettua alkeisrivitoimituksilla ykkösmatriisiksi, on A kääntyvä. Sen käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kuinka osoittaa, että matriisi ei ole kääntyvä?

- Jos alkeisrivitoimitusten avulla saadaan aikaan nollarivi, ei matriisi voi olla riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.
- Silloin matriisi ei ole kääntyvä.

Esimerkki

Onko matriisilla

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi?

Esimerkki jatkuu

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-4R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-3R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Koska saatiin nollarivi, matriisi B ei ole kääntyvä.

DETERMINANTTI

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(a) Jos $n = 1$, niin $\det(A) = a_{11}$.

(b) Muussa tapauksessa

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}),$$

missä A_{ij} on matriisi, joka on saatu matriisista A poistamalla i:s rivi ja j:s sarake.

Merkintä

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Esimerkki

Lasketaan matriisien $A = [4]$ ja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantit.

2×2-matriisin determinantti

Muistisääntö:

$$\begin{array}{r} - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ + \end{array}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Esimerkki

Lasketaan matriisin

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determinantti.

3×3-matriisin determinantti

Muistisääntö:

$$\begin{array}{|ccc|cc} \multicolumn{1}{c}{} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \multicolumn{1}{c}{} & & + & + & + \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Determinantti kertoo kääntyvyydestä

Lause 2

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.