Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

26.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Sarakevektorit

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ voidaan samastaa matriisin

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

kanssa.
Joukon $\mathbb{R}^{n \times 1}$ alkioita kutsutaan *sarakevektoreiksi*.

Esimerkki

Vektoria $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ voidaan kertoa matriisilla $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Lasketaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ja vektorin $\bar{v} = (-5, 3)$ tulo.

Matriisikertolasku ja lineaariset yhtälöryhmät

Tutkitaan yhtälöryhmää

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m.
\end{cases}
$$

Merkitään

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.
$$

Matriisikertolasku ja lineaariset yhtälöryhmät

Nähdään, että

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmä voidaan näin ollen kirjoittaa muodossa $A\bar{x} = \bar{b}$.

Lause

Jos matriisi A on kääntyvä, yhtälöllä on $A\bar{x} = \bar{b}$ täsmälleen yksi ratkaisu.

Alkeismatriisit

Määritelmä

Matriisi on *alkeismatriisi*, jos se on saatu ykkösmatriisista yhdellä alkeisrivitoimituksella.

Esimerkkejä alkeismatriiseista:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne on saatu ykkösmatriisista tekemällä alkeisrivitoimitukset $\frac{1}{2}R_3$, $R_1 \leftrightarrow R_3$ ja $R_2 - 4R_4$.

Esimerkki

Kerrotaan edellisen esimerkin matriiseilla jotakin toista matriisia.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}a_{33} & \frac{1}{2}a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 4a_{41} & a_{22} - 4a_{42} & a_{23} - 4a_{43} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

Lemma

Alkeismatriisilla kertominen vastaa alkeisrivitoimituksen tekemistä.

Lause

Alkeismatriisit ovat kääntyviä, ja alkeismatriisin käänteismatriisi on myös alkeismatriisi.

Todistuksen idea: Jokaisella alkeisrivitoimituksella on "käänteistoimitus".
Käänteistoimitusta vastaava alkeismatriisi on etsitty käänteismatriisi.

Esimerkki

Etsitään alkeismatriisin

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi.

Käänteismatriisi on

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tämän voi vielä varmistaa laskemalla, että $EF = I$ ja $FE = I$.

Lause

Oletetaan, että A on $n \times n$-neliömatriisi. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

a) Matriisi A on kääntyvä.

b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.