Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

25.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Tämän viikon kansilehdissä toisen tähtitehtävän tähti saattaa olla väärässä paikassa. Jos näin on, usko tehtäväpaperia äläkä kansilehteä.
- Tehtäviä ei tarvitse palauttaa täsmälleen kello 18. Ne voi palauttaa *aikaisemminkin*.

Esimerkki

Esimerkiksi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 500 \\ -3 & 11 & \pi \\ \frac{3}{4} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

on 4×3-matriisi eli $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$.

Matriisien yhteenlasku

Matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Matriisin kertominen skalaarilla

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriisikertolasku

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään, jos ja vain jos ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä.

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Esimerkki

Matriisien kertolasku ei ole vaihdannainen!

Lasketaan matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

tulo AB.

Miltä näytää tulo BA?

Matriisipotenssi

Potenssiin korottaminen määritellään kertolaskun avulla: Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi ja $k \in \{1, 2, \dots\}$. Tällöin voidaan määritellä potenssi

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ kpl}}.$$

Erityisiä matriiseja

Nollamatriisi:

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Ykkösmatriisi:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Usein merkitään $O_{m\times n} = O$ ja $I_n = I$.

Ykkösmatriisi

Miksimatriisia

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kutsutaan ykkösmatriisiksi?

Erityisiä matriiseja

Lävistäjämatriisi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Skalaarimatriisi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriisien laskusääntöjä

Lause

Seuraavat säännöt pätevät matriiseille A, B ja C sekä reaaliluvulle a, jos laskutoimitukset on määritelty:

(a) $A + B = B + A$

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(c) $A(BC) = (AB)C$

(d) $A(B + C) = AB + AC$

(e) $(A + B)C = AC + BC$

(f) $(A + B)C = AC + BC$

(g) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

Transpoosi

Määritelmä

Oletetaan, että A on $m \times n$ -matriisi. Sen *transpoosi* A^T on $n \times m$-matriisi, joka saadaan vaihtamalla matriisin A rivit ja sarakkeet keskenään.

Esimerkiksi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transpoosi on

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin A sanotaan olevan *symmetrinen*, jos $A^T = A$.

Käänteismatriisi

Määritelmä

Olkoon A neliömatriisi. Jos on olemassa matriisi B, jolle pätee

$$AB = I \quad \text{ja} \quad BA = I,$$

sanotaan, että A on *kääntyvä* ja B on matriisin A *käänteismatriisi*.

Esimerkki

Matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi on

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, sillä

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehtävä

Onko jokin seuraavista matriiseista matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ käänteismatriisi?

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Käänteismatriiseihin liittyviä tuloksia

Lause

Matriisilla on korkeintaan yksi käänteismatriisi.

- Jos matriisi A on kääntyvä, sen käänteismatriisille käytetään merkintää A^{-1}.
- Käänteismatriisit vastaavat käänteislukuja. Kaikki samat säännöt eivät kuitenkaan päde!

Käänteismatriiseihin liittyviä tuloksia

Lause

Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Tällöin myös matriisit A^{-1} ja AB ovat kääntyviä. Niiden käänteismatriisit ovat seuraavat:

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$