Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

19.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Perjantain luento on peruttu.
- Pidä luentomateriaali mukana pajassa. Kannattaa vaikkapa hankkia sille kansio. Voit säästää paperia tulostamalla molemmille puolille paperia tai laittamalla kaksi sivua vierekkäin samalle paperille.

Yhtälönratkaisun periaate yleisessä tapauksessa

- Johda yhtälöstä uusia yhtälöitä niin, että jokainen yhtälö seuraa loogisesti edellisestä.
- Alkuperäisen yhtälön ratkaisut ovat viimeksi saadun yhtälön ratkaisujen joukossa.
- Tarkista, mitkä ratkaisuista ovat alkuperäisen yhtälön ratkaisuja.

Esimerkki

Ratkaistaan yhtälö $\sqrt{x+2} = -x$.

Johdetaan yhtälöstä uusia yhtälöitä niin, että jokainen yhtälö seuraa aina loogisesti edellisestä:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= -x \\ x+2 &= (-x)^2 \\ x+2 &= x^2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Viimeisen yhtälön ratkaisut ovat $x = 2$ ja $x = -1$.

Tarkistetaan, mitkä ratkaisuista ovat alkuperäisen yhtälön ratkaisuja. Nähdään, että vain $x = -1$ kelpaa.

Vastaus: $x = -1$

Yhtälönratkaisun valmiit menetelmät

- Tähän asti yhtälöitä on yleensä ratkaistu valmiilla menetelmillä
  - Koulussa ratkaistavat ensimmäisen asteen yhtälöt
  - Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava
  - Gaussin-Jordanin menetelmä
- Edellä selitetty periaate on niissä sisäänrakennettuna. Ratkaisuja ei tarvitse tarkistaa lopuksi.

Kertausta: Kanta

- Vektorijono on aliavaruuden W kanta, jos
  a) se virittää aliavaruuden W ja
  b) on vapaa.
- Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

Dimensio

Voidaan osoittaa, että

- Jokaisella aliavaruudella on kanta.
- Jokaisessa aliavaruuden kannassa on yhtä monta vektoria.

Määritelmä

Aliavaruuden W *dimensio* $\dim(W)$ on aliavaruuden W kannan vektoreiden lukumäärä.

Jos aliavaruuden dimensio on n, sanotaan, että aliavaruus on *n-ulotteinen*.

Esimerkki

- Avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimensio on 2, sillä avaruudella on luonnollinen kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.
- Vastaavasti avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio on n, sillä avaruuden luonnollisen kannan vektorien lukumäärä on n.

Esimerkki

Merkitään $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ ja $\bar{v}_3 = (0, -5, 1)$. Olkoon $W = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Mikä on aliavaruuden W dimensio?

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 0 & u_1 \\ -1 & 1 & -5 & u_2 \\ 5 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{lrr|c} 1 & -1 & 5 & -u_2 \\ 0 & 1 & -3 & (u_1 + 3u_2)/5 \\ 0 & 0 & 0 & (5u_3 + u_2 - 8u_1)/5 \end{array}\right]$$

MATRIISIT

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriisi A on $m \times n$-matriisi eli sen *tyyppi* on $m \times n$.
- Rivillä i sarakkeessa j olevaa alkiota merkitään $A(i, j)$.
- Kaikkien reaalikertoimisten $m \times n$ -matriisien joukkoa merkitään $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Esimerkki

Esimerkiksi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 500 \\ -3 & 11 & \pi \\ \frac{3}{4} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

on 4×3-matriisi eli $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$.

Matriisien yhteenlasku

Matriiseja, joilla on sama tyyppi, voidaan laskea yhteen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 5+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Matriisin kertominen skalaarilla

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriisikertolasku

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään, jos ja vain jos ensimmäisessä on yhtä paljon sarakkeita kuin toisessa on rivejä.

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$