Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

18.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Perjantain luento on peruttu.
- Harjoitusessa 2 oli paljon todella hienoja ratkaisuja. Erinomaista työtä!
- Pajan aukioloajat ovat lisääntyneet hieman. Katso uudet aikataulut.
- Jos ruuhka ahdistaa, käy pajassa silloin, kun siellä on hiljaista (esim. ma koko päivä tai to iltapäivä).

Määritelmä

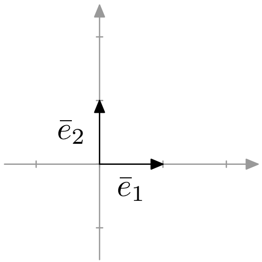
Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

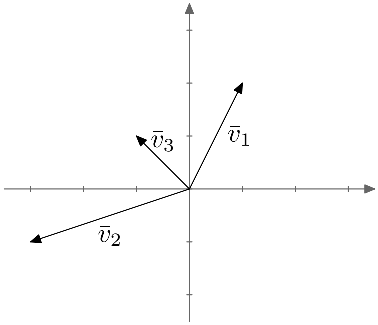
Kertausta: vapaus

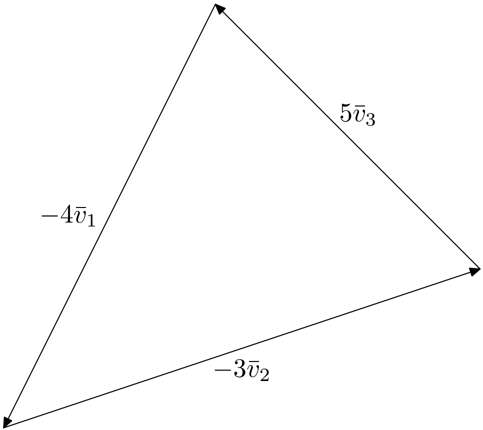
Vapaat eli lineaarisesti riippumattomat vektorit:



Kertausta: vapaus

Sidotut vektorit:





Miksi vapaus kiinnostaa?

- Jos jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, **nollavektori** voidaan kirjoitta vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa vain yhdellä tavalla.
- Tästä seuraa itse asiassa, että **kaikki** avaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ vektorit voidaan kirjoitta lineaarikombinaationa vain yhdellä tavalla.
- Vapaasta vektorijonosta saadaan siis virittäjäjoukko, jossa ei ole turhia vektoreita. Tähän pyrittiin!

Lause

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

Todistus

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoitetaan, että aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ jokainen alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että aliavaruuden $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ jokainen alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa. Osoitetaan, että $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa.

Määritelmä

Lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kaikki vakiot ovat nollia, on nimeltään *homogeeninen yhtälöryhmä*.

Esim.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} - 2x_4 = 0 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

Lause

Jos homogeenisessa yhtälöryhmässä tuntemattomien määrä n on suurempi kuin yhtälöiden määrä m, niin homogeenisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdots \to \cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

- Koska vakiot ovat nollia, ei tule epätosia yhtälöitä.
- Koska sarakkeita on enemmän kuin rivejä, tulee välttämättä vapaita muuttujia. Siten ratkaisuja on äärettömän monta.

Seuraus

Lause

Oletetaan, että $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$, missä $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Jos $m > n$, niin jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m)$ on sidottu.

Kanta

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in W$. Vektorijono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos

a) $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ ja

b) $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Esimerkki

- On osoitettu, että vektorit $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$. Lisäksi on osoitettu, että jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa. Siten $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.
- Vastaavasti avaruudella $\mathbb{R}^n$ on kanta

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n),$$

missä $\bar{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Kantaa kutsutaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnolliseksi kannaksi.

Lause

Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden W vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k$ lineaarikombinaationa.

Esimerkki

Merkitään $\bar{w}_1 = (2, -1)$, $\bar{w}_2 = (1, 3)$. Osoitetaan, että $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Koordinaatit

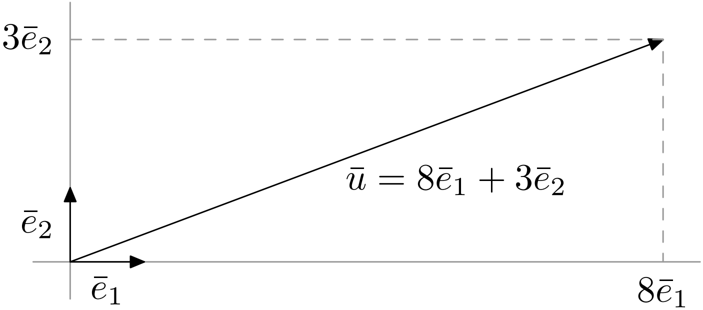
Määritelmä

Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in W$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan* $\mathcal{B}$ *suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \ldots, a_k$, joilla

$$\bar{u} = a_1 \bar{w}_1 + \cdots + a_k \bar{w}_k \,.$$

Esimerkki

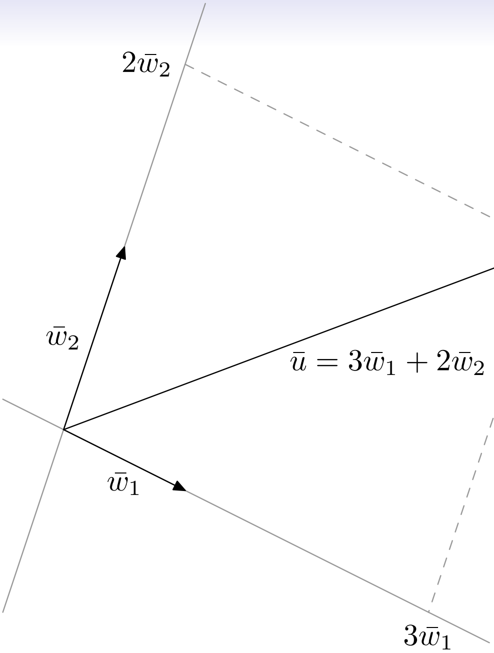
Määritetään vektorin $\bar{u} = (8, 3)$ koordinaatit avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollisen kannan $\mathcal{E}_2 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ suhteen.



Esimerkki

Määritetään vektorin $\bar{u} = (8, 3)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ suhteen, missä $\bar{w}_1 = (2, -1)$ ja $\bar{w}_2 = (1, 3)$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (3u_1 - u_2)/7 \\ 0 & 1 & (u_1 + 2u_2)/7 \end{array}\right].$$



$2\bar{w}_2$
$\bar{w}_2$
$\bar{u} = 3\bar{w}_1 + 2\bar{w}_2$
$\bar{w}_1$
$3\bar{w}_1$

Esimerkki

Merkitään $\bar{v}_1 = (3, -1, 5)$, $\bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ ja $\bar{v}_3 = (0, -5, 1)$. Olkoon $W = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Mikä on aliavaruuden W dimensio?

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 0 & u_1 \\ -1 & 1 & -5 & u_2 \\ 5 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 5 & -u_2 \\ 0 & 1 & -3 & (u_1 + 3u_2)/5 \\ 0 & 0 & 0 & (5u_3 + u_2 - 8u_1)/5 \end{array}\right].$$

Miksi pitää käyttää Gaussin-Jordanin menetelmää?

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 2, \end{cases}$$

Toisesta yhtälöstä nähdään, että $x_2 = 1/2$. Sijoitetaan se ensimäiseen yhtälöön:

$$x_1 = 1 - x_2 = 1 - 1/2 = 1/2.$$

Siten yhtälöryhmän ratkaisu on $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$.

Mikä menee pieleen? Vai meneekö mikään?

Saatu ratkaisu ei toteuta kolmatta yhtälöä!

Sama Gaussin-Jordanin menetelmällä

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{array}\right] \cdots \to \cdots \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nähdään, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Millaiset perustelut riittävät?

Merkitään $\bar{v}_1 = (2,0,1,4)$, $\bar{v}_2 = (1,2,0,0)$, $\bar{v}_3 = (3,1,0,2)$ ja $\bar{w} = (4,-4,3,12)$. Päteekö $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$?

Ratkaisu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vastaus: $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Mitä mieltä olet tästä ratkaisusta? Miten sitä voisi parantaa?

Ratkaisuehdotus

Selvitetään, onko olemassa lukuja $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, joille pätee $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$.
Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ x_1 & & & & & = & 3 \\ 4x_1 & & & + & 2x_3 & = & 12. \end{cases}$$

…Sen ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, pätee $\bar{v}_3 \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.