Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

14.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Tarkistetut tehtävät ovat nykyään laatikoissa pajaluokan ulkopuolella. Tehtävät on lajiteltu kurssitunnuksen mukaan.
- Paperit takertuvat helposti toisiinsa. Varo, ettet vahingossa ota mukaasi toisten opiskelijoiden tehtäviä.
- Jos et jostain erittäin hyvästä syystä pääse varsinaiseen kokeeseen, voit osallistua korvaavaan kokeeseen. Tule keskustelemaan luennoitsijan kanssa asiasta.

Esimerkki

Osoitetaan, että vektorit

$$\bar{u}_1 = (1,1,0),\ \ \bar{u}_2 = (1,0,1),\ \ \bar{u}_3 = (0,1,1) \text{ ja } \bar{u}_4 = (-2,1,1)$$

virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

Oletetaan, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. On selvitettävä, onko olemassa lukuja $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 + x_4\bar{u}_4 = \bar{w}.$$

Saadaan yhtälöryhmä, jonka matriisi on

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w_3 \end{array}\right].$$

Esimerkki

Alkeisrivitoimituksilla saadaan porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & w_1 - w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2}(w_3 + w_2 - w_1) \end{array}\right].$$

Nähdään, että tällä yhtälöryhmällä on ratkaisuja. On siis olemassa luvut $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, joille pätee

$$x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 + x_3 \bar{u}_3 + x_4 \bar{u}_4 = \bar{w}.$$

Siten $\mathbb{R}^3 = \text{span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$.

Tavoite

Tavoitteena on löytää sellainen virittäjäjoukko, että aliavaruuden vektorit voidaan ilmaista virittäjävektorien lineaarikombinaationa **täsmälleen yhdellä tavalla**.

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

Esimerkki

Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Onko avaruuden $\mathbb{R}^2$ jono $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ on vapaa?

Esimerkki

Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (-4, -2)$. Onko avaruuden jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ vapaa?

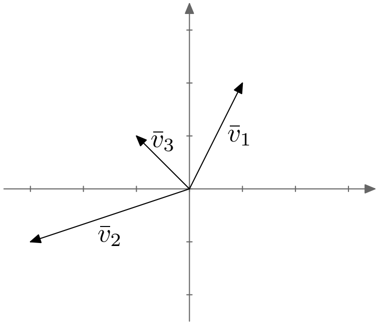
Esimerkki

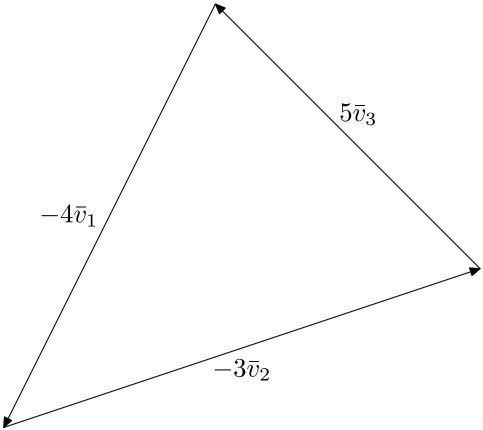
Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 2)$, $\bar{v}_2 = (-3, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 1)$.
Tutkitaan, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa vai sidottu.

Esimerkki jatkuu

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array}\right].$$


$\bar{v}_3$
$\bar{v}_1$
$\bar{v}_2$


$5\bar{v}_3$
$-4\bar{v}_1$
$-3\bar{v}_2$