Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

12.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Muista perustella vastauksesi. Pidä tämä mielessä esimerkiksi harjoituksen 2, tähtitehtävässä 12.
- Kiitos niille, jotka ovat kertoneet kurssimateriaalin kirjoitusvirheistä!

Esimerkki

Lineaarisen yhtälöryhmän matriisi muutettiin alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Mikä on yhtälöryhmän ratkaisu?

Esimerkki

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = -2\,. \end{cases}$$

Määritä ne k:n arvot, joilla yhtälöryhmällä on

- yksi ratkaisu
- äärettömän monta ratkaisua
- ei yhtään ratkaisua.

Esimerkki jatkuu

$$\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & -2-k \end{array}\right]$$

Esimerkki jatkuu

Jos $k - 1 \neq 0$ ja $2 - k - k^2 \neq 0$, voidaan jatkaa alkeisrivitoimituksilla. Saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (-2-k)/(2-k-k^2) \end{array}\right].$$

Esimerkki

Millä ehdolla vektori $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kuuluu vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (3, 2, -1),\ \ \bar{v}_2 = (2, -2, 6) \text{ ja } \bar{v}_3 = (3, 4, -5)$$

virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$?
Tutkitaan, milloin yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$ on ratkaisuja.
Saadaan yhtälöryhmä

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & w_1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & w_2 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & w_3. \end{array}\right.$$

Esimerkki jatkuu

Muokataan yhtälöryhmää vastaava matriisi porrasmatriisiksi:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -6 & 5 & -w_3 \\ 0 & 10 & -6 & w_2 + 2w_3 \\ 0 & 0 & 0 & w_1 - 2w_2 - w_3 \end{array}\right]$$

Esimerkki

Merkitään $\bar{e}_1 = (1, 0)$ ja $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Osoitetaan, että

$$\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \mathbb{R}^2.$$