Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

11.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Hyvää työtä ensimmäisissä harjoituksissa!
- Kun kirjoitat ratkaisujasi, muista perustella ne. Pelkät laskut eivät riitä.
- Tarkista tähdettömät tehtävät ratkaisuehdotuksesta. Jos et ole varma ratkaisuistasi, kysy neuvoa pajasta.

Kertausta: Virittäminen

Määritelmä

Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *virittämä aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Kertausta: Virittäminen

- Origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat joidenkin vektoreiden virittämiä aliavaruuksia.
- Nollavektorin virittämä aliavaruus on $\{\bar{0}\}$.
- Aliavaruuden alkioiden summat ja skalaarimonikerrat ovat myös aliavaruuden alkioita.

Esimerkki

Kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

$$\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1),\ \ \bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1) \text{ ja } \bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$$

virittämään aliavaruuteen span$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$?

Esimerkki jatkuu

On siis ratkaistava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \quad\quad\;\; 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 \quad\quad\;\; + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 \quad\quad\;\; = -1. \end{cases}$$

Tämä on niin kutsuttu lineaarinen yhtälöryhmä.

Yhtälöryhmän matriisi

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ (-1)x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 1 \cdot x_1 & + & (-1)x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & -1. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ekvivalentit yhtälöryhmät

Määritelmä

Yhtälöryhmiä kutsutaan *ekvivalenteiksi*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut.

Ideana on johtaa yhtälöryhmästä uusia ekvivalentteja yhtälöryhmiä alkeisrivitoimituksilla.

Alkeisrivitoimitukset

1. Vaihdetaan kahden rivin paikka matriisissa.
2. Kerrotaan jokin rivi **nollasta poikkeavalla** reaaliluvulla.
3. Lisätään johonkin riviin **jokin toinen** rivi reaaliluvulla kerrottuna.

Esimerkkejä alkeisrivitoimituksista

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 5R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-(1/7)R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Yhtälönratkaisun idea

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{c}\text{alkeisrivi-} \\ \cdots \\ \text{toimituksia}\end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{c}\text{samat} \\ \text{ratkaisut}\end{array} \longrightarrow \begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad = \vdots \\ c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Porrasmatriisi

Määritelmä

Matriisi on *porrasmatriisi*, jos

1. mahdolliset nollarivit ovat alimpina.
2. kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio (eli *johtava alkio*) on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.

$$\begin{bmatrix} 14 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehtävä

a) $$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 5 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \pi \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & \sqrt{3} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu

a) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 5 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \pi \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ei ole porrasmatriisi

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & \sqrt{3} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Redusoitu porrasmatriisi

Määritelmä

Matriisi on *redusoitu porrasmatriisi*, jos

1. se on porrasmatriisi.
2. jokaisen rivin johtava alkio on 1.
3. jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta poikkeava alkio.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehtävä

Mitkä seuraavista matriiseista ovat redusoituja porrasmatriiseja? Määritä niitä vastaavat yhtälöryhmät.

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi \end{bmatrix}$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

1. Kirjoita yhtälöryhmän matriisi.
2. Muuta matriisi alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi.
3. Muuta porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi.
4. Lue ratkaisut redusoidusta porrasmatriisista.

Esimerkki

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esimerkki jatkuu

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Esimerkki jatkuu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/4)R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tuloksena redusoitu porrasmatriisi

Tiivistelmä

- Yhtälöryhmän matriisista johdetaan alkeisrivitoimituksilla uusia matriiseja.
- Kaikkia näitä matriiseja vastaavilla yhtälöryhmillä on samat ratkaisut.
- Viimein saadaan redusoitu porrasmatriisi, josta ratkaisut on helppo lukea.
- Nämä ratkaisut ovat täsmälleen samat kuin alkuperäisen yhtälöryhmän.

Esimerkki

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3x - 6y - 3z = -21. \end{cases}$$

Esimerkki

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 15x_3 = 9 \\ x_1 \qquad\quad - \ \ 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - \ \ x_2 - \quad\ x_3 = 0\,. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & -15 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/3)R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + 3R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Virittäminen

- Kuuluuko vektori $\bar{w} = (-2, 3, 2, -1)$ vektoreiden

  $\bar{v}_1 = (0, -1, 2, 1)$, $\bar{v}_2 = (2, 0, 1, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$

  virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$?
- Ratkaistaan yhtälöstä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{w}$ saatava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \quad 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 \quad + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

  Laskemalla näkee, että sillä ei ole ratkaisua.
- Siis $\bar{w} \notin \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.