

# Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

10.10.2012

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Johanna Rämö

## Käytännön asioita

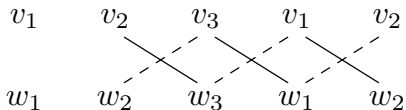
- Perjantain luennolla vierailee professori Samuli Siltanen kertomassa lineaarialgebran sovelluksista.
- Jos ihmettelet, mikä tekemässäsi tehtävässä meni pieleen, kysy ohjaajilta tai luennoitsijalta.
- Kurssikoe ke 17.10. klo 13.00-16.00. Mukana saa olla laskin muttei taulukkokirjaa.

# Ristitulo

## Määritelmä

Vektorien  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  ja  $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$  ristitulo on vektori

$$\bar{v} \times \bar{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1).$$



## Esimerkki

Lasketaan vektoreiden  $\bar{a} = (2, 1, 4)$  ja  $\bar{b} = (3, -1, -3)$  ristitulo  $\bar{a} \times \bar{b}$ .

## Toinen muistisääntö

Ristitulo  $\bar{v} \times \bar{w}$  saadaan laskemalla determinantti

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

missä  $\bar{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{j} = (0, 1, 0)$  ja  $\bar{k} = (0, 0, 1)$ .

# Pistetulo vs. ristitulo

## Pistetulo

- avaruuden  $\mathbb{R}^n$  vektoreille
- tuloksena reaaliluku

## Ristitulo

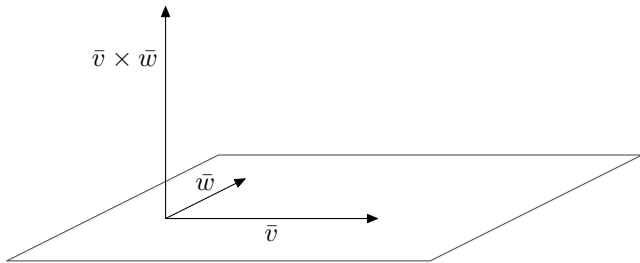
- avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreille
- tuloksena vektori

## Ristitulo ja kohtisuoruus

### Lause

Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ . Tällöin

$$(\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{v} \quad \text{ja} \quad (\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{w}.$$



## Ristitulolle on kaikenlaisia laskusääntöjä

### Lause

Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ . Tällöin

$$\bar{v} \times \bar{w} = -(\bar{w} \times \bar{v}).$$

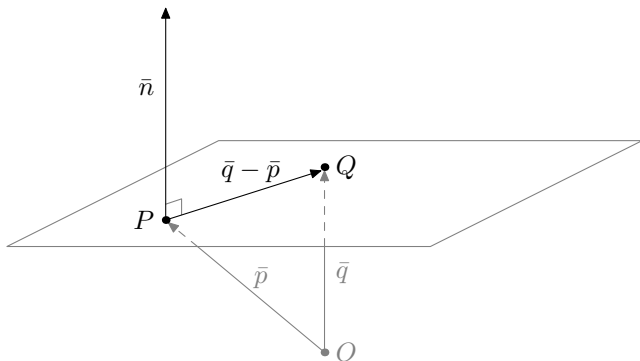


## Kertausta: tason normaalimuotoinen yhtälö

Oletetaan, että  $T$  on taso, joka kulkee pisteen  $P$  kautta ja jolla on normaali  $\bar{n}$ . Piste  $Q$  on tasossa  $T$ , jos ja vain jos

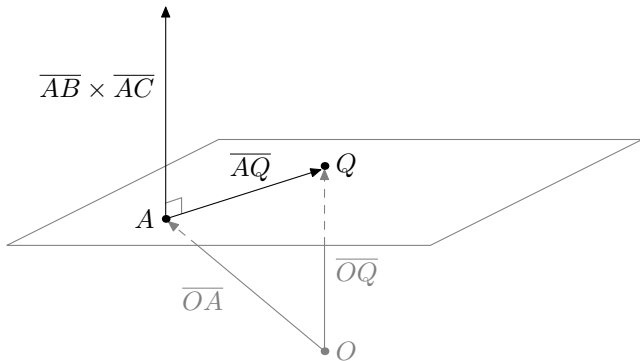
$$\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}) = 0,$$

missä  $\bar{q} = \overline{OQ}$  ja  $\bar{p} = \overline{OP}$ .



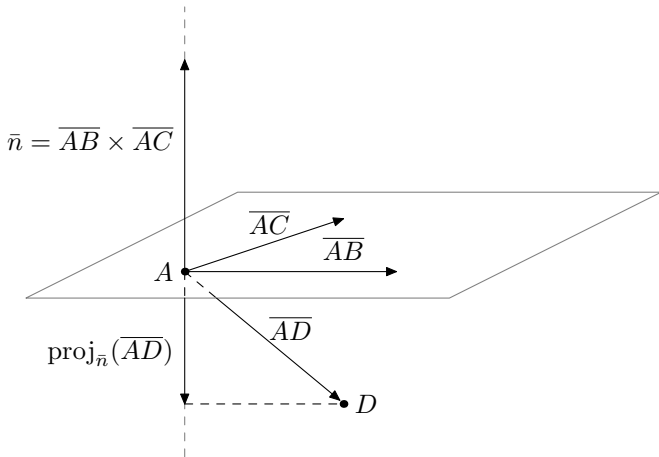
## Ristitulo ja tason normaalimuotoinen yhtälö

Määritetään normaalimuotoinen yhtälö tasolle  $T$ , joka kulkee pisteiden  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (-1, 3, 2)$  ja  $C = (-2, 0, 1)$  kautta.



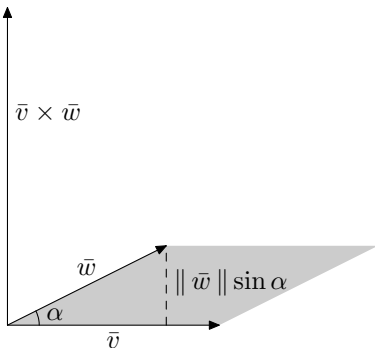
## Ristitulo ja pisteen etäisyys tasosta

Merkitään  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (-1, 3, 2)$  ja  $C = (-2, 0, 1)$ .  
Oletetaan, että taso  $T$  kulkee pisteiden  $A$ ,  $B$  ja  $C$  kautta.  
Määritä pisteen  $D = (1, 2, 3)$  etäisyys tasosta  $T$ .



## Ristitulo ja suunnikkaan ala

Ristitulovektorin  $\bar{v} \times \bar{w}$  pituus on yhtä suuri kuin vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  määrämän suunnikkaan ala.



## Ristitulo ja suuntaissärmiön tilavuus

Vektoreiden  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  ja  $\bar{u}$  määräämään suuntaissärmiön tilavuus on  $|(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{u}|$ .

