Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

9.10.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Tämän päivän toisen luennon alussa vierailee tutkija Teemu Roos kertomassa lineaarialgebran sovelluksista.

Totta vai tarua?

Jos yhtälöryhmässä on enemmän muuttujia kuin yhtälöitä, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad\; x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\; x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Tarua!

Tähän mennessä pistetulon avulla on määritelty

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$

- vektorin pituus eli normi: $\| \bar{v} \| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$
- vektorien välinen etäisyys: $d(\bar{v}, \bar{w}) = \| \bar{v} - \bar{w} \|$
- vektorien välinen kulma: $\cos \alpha = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\| \bar{v} \| \, \| \bar{w} \|}$
- kohtisuoruus eli ortogonaalisuus:

$$\bar{v} \perp \bar{w}, \text{ jos ja vain jos } \bar{v} \cdot \bar{w} = 0$$

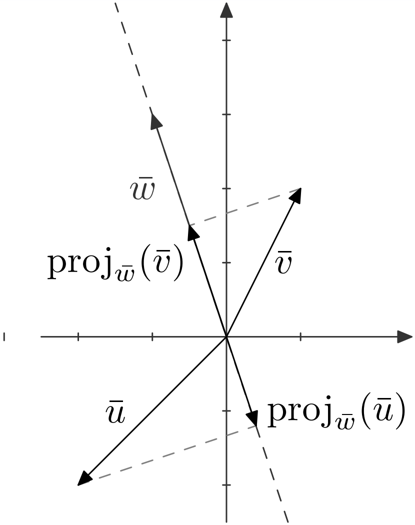
- projektio: $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(v) = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$

Projektio

Määritelmä

Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ *projektio* vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\operatorname{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$


$\bar{w}$
$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$
$\bar{v}$
$\bar{u}$
$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{u})$

Miksi projektio määritellään niin kuin määritellään?

Halutaan, että

(a) projektio $\text{proj}_{\bar{w}}(v)$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa.

(b) vektorit $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\bar{w}$ ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vektori $\dfrac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$ toteuttaa nämä ehdot.

Miksi projektio määritellään niin kuin määritellään?

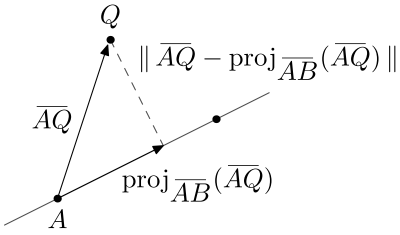
Oletetaan, että vektori $\bar{p}$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa ja $(\bar{v} - \bar{p}) \perp \bar{w}$. Tästä seuraa ensinnäkin, että $\bar{p} = t\bar{w}$ jollakin $t \in \mathbb{R}$. Lisäksi $(\bar{v} - t\bar{w}) \cdot \bar{w} = 0$. Näin saadusta yhtälöstä voidaan ratkaista luku t:

$$t = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}.$$

Siten $\bar{p} = t\bar{w} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w} = \operatorname{proj}\bar{w}(\bar{v})$. Projektio on siis ainoa vektori, joka toteuttaa halutut ehdot.

Projektion sovellus: Pisteen etäisyys suorasta

Määritä pisteen $Q = (4, -1, 9)$ etäisyys suorasta S, joka kulkee pisteiden $A = (2, -3, 5)$ ja $B = (4, 1, 7)$ kautta.



Ortogonaalinen ja ortonormaali kanta

- Ortogonaalisen kannan kaikki vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
- Ortonormaalin kannan kaikki vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja lisäksi niiden pituus on yksi.

Ortogonaalinen ja ortonormaali kanta

Määritelmä

Aliavaruuden W kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on *ortogonaalinen*, jos

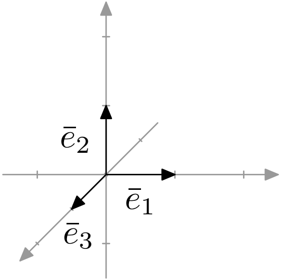
$$\bar{w}_i \cdot \bar{w}_j = 0 \quad \text{kaikilla } i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, \text{ missä } i \neq j.$$

Kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja lisäksi

$$\| \bar{w}_i \| = 1 \quad \text{kaikilla } i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

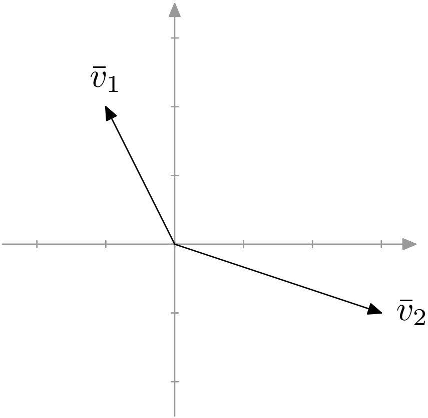
Esimerkki

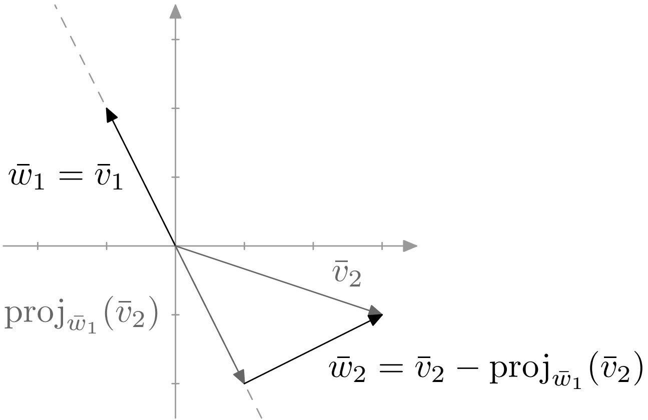
Avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ on ortonormaali.



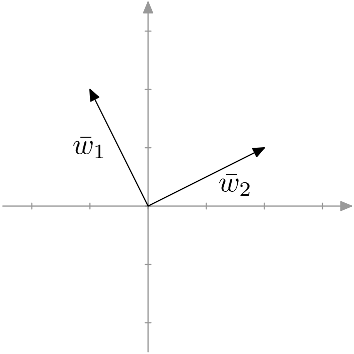
Kuinka kannasta voidaan muodostaa ortonormaali kanta

Merkitään $\bar{v}_1 = (-1, 2)$ ja $\bar{v}_2 = (3, -1)$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Muodostetaan siitä ortonormaali kanta.

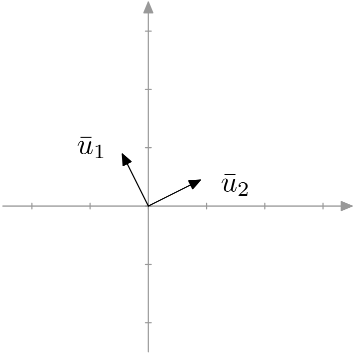

$\bar{v}_1$
$\bar{v}_2$



$\bar{w}_1 = \bar{v}_1$
$\bar{v}_2$
$\mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2)$
$\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2)$



$\bar{w}_1$
$\bar{w}_2$



$\bar{u}_1$
$\bar{u}_2$

Koordinaatit ortonormaalin kannan suhteen

Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ on aliavaruuden W ortonormaali kanta. Oletetaan, että $\bar{w} \in W$.

Tällöin vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat $\bar{w} \cdot \bar{u}_1$, $\bar{w} \cdot \bar{u}_2, \ldots, \bar{w} \cdot \bar{u}_k$ eli

$$\bar{w} = (\bar{w} \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{w} \cdot \bar{u}_2)\bar{u}_2 + \cdots + (\bar{w} \cdot \bar{u}_k)\bar{u}_k.$$

Esimerkki

Tarkastellaan aiemmassa esimerkissä esiintynyttä avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaalia kantaa $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, jossa

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2), \qquad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

Määritä vektorin $\bar{v} = (3, 4)$ koordinaatit tämän kannan suhteen.