Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

7.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Tarkistetut tehtävät ovat noudettavissa pajasta viimeistään keskiviikkoaamuna, mutta todennäköisesti ne ovat valmiina jo aikaisemmin.
- Tehtävät löytyvät aikanaan palautuspöydän alla olevasta hyllyköstä. Ne lajitellaan kurssikoodin mukaan nimetyihin laatikoihin.

Lause

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja a, $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ (vaihdannaisuus)

(b) $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ (liitännäisyys)

(c) $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(d) $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

(e) $c(\bar{v} + \bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$ (osittelulaki)

(f) $(a + c)\bar{v} = a\bar{v} + c\bar{v}$ (osittelulaki)

(g) $a(c\bar{v}) = (ac)\bar{v}$

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$

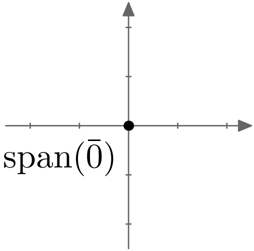
Vektoreiden virittämä aliavaruus

Määritelmä

Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *virittämä aliavaruus* on joukko

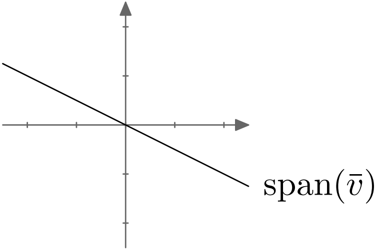
$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Nollavektorin virittämä aliavaruus



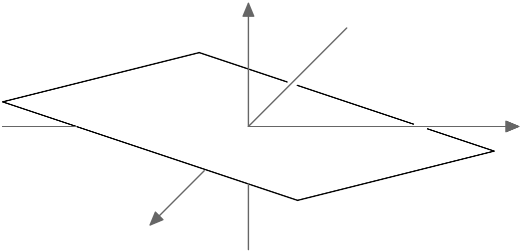
$$\mathrm{span}(\bar{0}) = \{a \cdot \bar{0} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\bar{0}\}$$

Muun kuin nollavektorin virittämä aliavaruus



$$\text{span}(\bar{v}) = \{a\bar{v} \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Kahden vektorin virittämä aliavaruus



$$\mathrm{span}(\bar{v}, \bar{w}) = \{s\bar{v} + t\bar{w} \mid s, t \ \in \mathbb{R}\}$$

Jos vektorit ovat yhdensuuntaiset, ei tuloksena ole taso!

Miksi origon kautta kulkevat suorat ja tasot kiinnostavat?

- Tarkastellaan suoraa

$$S = \mathrm{span}(\bar{v}) = \{k\bar{v} \mid k \in \mathbb{R}\},$$

  missä $\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$.
- Jos suoran alkioita summaa keskenään tai kertoo skalaareilla, on tuloksena suoran alkio.

Miksi origon kautta kulkevat suorat ja tasot kiinnostavat?

- Tarkastellaan suoraa

$$S = \{(-1, 2) + k(-2, -1) \mid k \in \mathbb{R}\},$$

joka ei kulje origon kautta.

- Jos suoran alkioita summaa keskenään tai kertoo skalaareilla, tuloksena **ei** ole suoran alkio.

Lause

Oletetaan, että $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ..., $\bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Merkitään $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin

a) jos $\bar{u}$, $\bar{w} \in W$, niin $\bar{u} + \bar{w} \in W$.

b) jos $\bar{w} \in W$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin $a\bar{w} \in W$.

c) $\bar{0} \in W$.