

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

5.10.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Ensi tiistaina luennolla vierailee Teemu Roos kertomassa lineaarialgebran sovelluksista.

Tähän mennessä pistetulon avulla on määritelty

Avaruudessa \mathbb{R}^n

- vektorin pituus eli normi: $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$
- vektorien välinen etäisyys: $d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\|$
- vektorien välinen kulma: $\cos \alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|}$.

Ortogonaalisuus eli kohtisuoruus

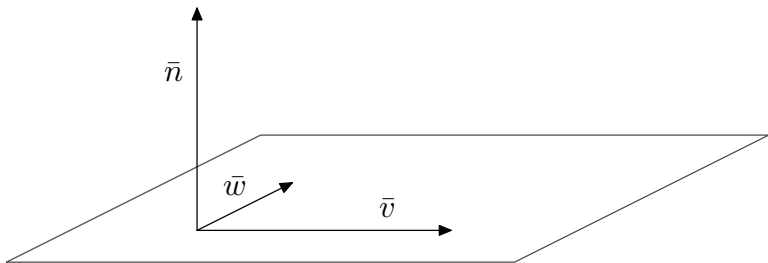
Määritelmä

Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 0.$$

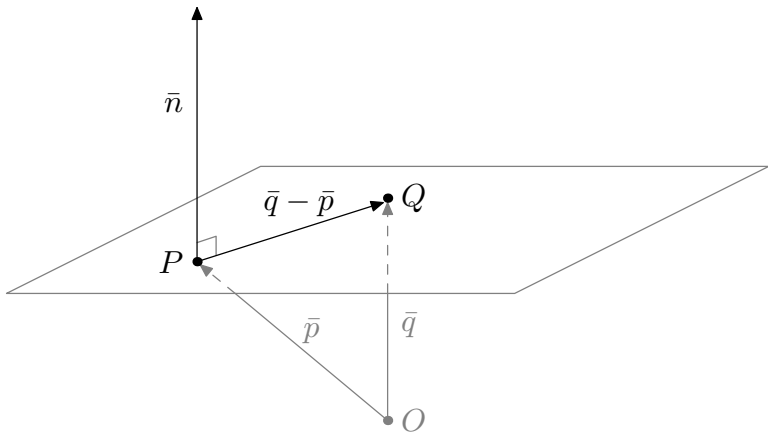
Tällöin merkitään $\bar{v} \perp \bar{w}$.

Pistetulon sovellus: Tason normaalimuotoinen yhtälö



Tason normaali on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan.

Tason normaalimuotoinen yhtälö



Tason normaalimuotoinen yhtälö

Oletetaan, että T on avaruuden \mathbb{R}^3 taso, joka kulkee pisteen P kautta ja jolla on normaali \bar{n} .

Piste Q on tasossa T , jos ja vain jos

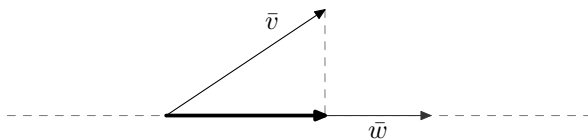
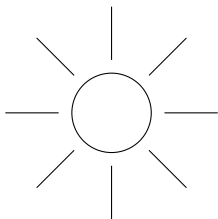
$$\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}) = 0,$$

missä $\bar{q} = \overline{OQ}$ ja $\bar{p} = \overline{OP}$.

Esimerkki

Oletetaan, että taso T kulkee pisteen $P = (6, 0, 1)$ kautta ja sillä on normaali $\bar{n} = (1, 2, 3)$. Määritetään tason T normaalimuotoinen yhtälö.

Projektio



Projektio

Määritelmä

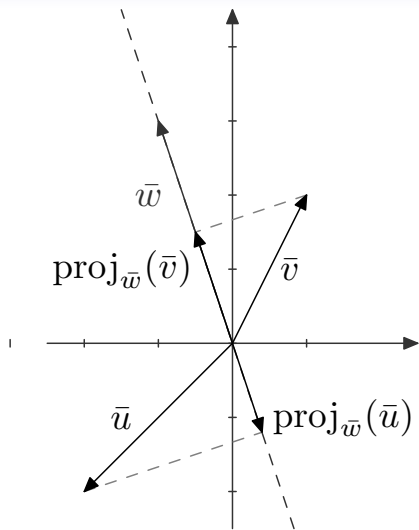
Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Tällöin vektorin \bar{v} *projektio* vektorin \bar{w} virittämälle aliavaruudelle on

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Esimerkki

Määritä vektorin $\bar{v} = (1, 2)$ projektio vektorin $\bar{w} = (-1, 3)$ virittämälle aliavaruudelle.

Määritä vektorin $\bar{u} = (-2, -2)$ projektio vektorin $\bar{w} = (-1, 3)$ virittämälle aliavaruudelle.



Projektion ominaisuuksia

- Projektio $\text{proj}_{\bar{w}}(v)$ on aina yhdensuuntainen vektorin \bar{w} kanssa.
- Vektorit $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja \bar{w} ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Projektion sovellus: Pisteen etäisyys suorasta

Määritä pisteen $Q = (4, -1, 9)$ etäisyys suorasta S , joka kulkee pisteiden $A = (2, -3, 5)$ ja $B = (4, 1, 7)$ kautta.