

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

4.9.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Vektorit

Määritelmä

Avaruus \mathbb{R}^2 koostuu reaalilukupareista. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ ja } b \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden \mathbb{R}^2 alkoita kutsutaan *vektoreiksi*.

Vektoreita voidaan havainnollistaa

Havainnollistetaan vektoreita $(3, -1)$ ja $(2, 4)$

- pisteinä

Vektoreita voidaan havainnollistaa

Havainnollistetaan vektoreita $(3, -1)$ ja $(2, 4)$

- pisteinä
- paikkavektoreina

Vektoreita voidaan havainnollistaa

Havainnollistetaan vektoreita $(3, -1)$ ja $(2, 4)$

- pisteinä
- paikkavektoreina
- suuntajanoina

Vektorien summa

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

Skalaarikertolasku

Määritelmä

Oletetaan, että $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$c\vec{v} = (cv_1, cv_2).$$

Esimerkki

Merkitään $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Määritä vektorit

a) $\bar{v} + \bar{w}$

Esimerkki

Merkitään $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Määritä vektorit

a) $\bar{v} + \bar{w}$

b) $2\bar{v}$

Esimerkki

Merkitään $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Määritä vektorit

a) $\bar{v} + \bar{w}$

b) $2\bar{v}$

c) $-\frac{1}{2}\bar{v}$.

Vastavektori ja erotus

- Vektorin \bar{v} *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$.
- Vektoreiden \bar{v} ja \bar{w} *erotus* on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$.

Esimerkki

Merkitään $\bar{v} = (4, 1)$ ja $\bar{w} = (-3, 2)$. Määritä vektori $\bar{v} - \bar{w}$.

Avaruuden \mathbb{R}^3 vektorit

- Avaruus \mathbb{R}^3 on joukko $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
- Yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään komponenteittain samalla tavalla kuin avaruudessa \mathbb{R}^2 .

Avaruus \mathbb{R}^n

Oletetaan, että $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Määritelmä

Avaruuden \mathbb{R}^n alkiot ovat reaaliluvuista koostuvia n -jonoja. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden \mathbb{R}^n alkiota kutsutaan *vektoreiksi*.

Vektorien laskutoimitukset

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\bar{v} + \bar{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \quad \text{ja}$$

$$c\bar{v} = (cv_1, cv_2, \dots, cv_n).$$

Vastavektori, erotus ja nollavektori

- Vektorin \bar{v} *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$.
- Vektoreiden \bar{v} ja \bar{w} *erotus* on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$.
- Vektoria $(0, 0, \dots, 0)$ kutsutaan *nollavektoriksi*. Sille käytetään merkitä $\bar{0}$.

Esimerkki

Merkitään $\bar{v} = (-5, 3, 0, 1, -1)$ ja $\bar{w} = (-2, -4, 2, 3, 5)$.

Määritä vektori $2\bar{v} - 3\bar{w}$.

Linearikombinaatio

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektori \bar{w} on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ *linearikombinaatio*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut a_1, a_2, \dots, a_k , että

$$\bar{w} = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_k \bar{v}_k.$$

Esimerkki

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 2)$ ja $\bar{w} = (5, -1)$.

Osoitetaan, että vektori \bar{w} on vektoreiden \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 lineaarikombinaatio.