Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

3.10.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Kurssikoe järjestetään ke 17.10. klo 13.00-16.00. Koe alkaa tasalta!
- Jos et pääse kokeeseen, kerro siitä heti.

Mitkä ovat yhtäpitäviä vapauden määritelmän kanssa?

Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee

(a) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$, kun $c_1 = 0$, …, $c_k = 0$

(b) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ vain, jos $c_1 = 0$, …, $c_k = 0$

(c) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ joillakin $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$

(d) jos $c_1 = 0$, …, $c_k = 0$, niin $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$

(e) yhtälöllä $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Vastaus: b ja e

PISTETULO

Määritelmä

Vektoreiden $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

Normi eli pituus

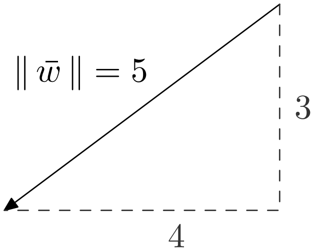
Määritelmä

Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli pituus on

$$\| \bar{v} \| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Esimerkki

Vektorin $\bar{v} = (-3, -4)$ normi on $\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$.



Esimerkki

Määritä vektorin $\bar{w} = (-1, \sqrt{2}, -2, 0)$ normi.

Normin ominaisuuksia

Lause

Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

(a) $\| \bar{v} \| \geq 0$

(b) $\| \bar{v} \| = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = 0$.

Lause

Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\| \, c\bar{v} \, \| = |c| \| \, \bar{v} \, \|.$$

Yksikkövektori

Määritelmä

Vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on *yksikkövektori*, jos sen normi on yksi eli

$$\| \bar{u} \| = 1.$$

Esimerkki

Etsitään yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen vektorin $\bar{v} = (2, -1, 0)$ kanssa.

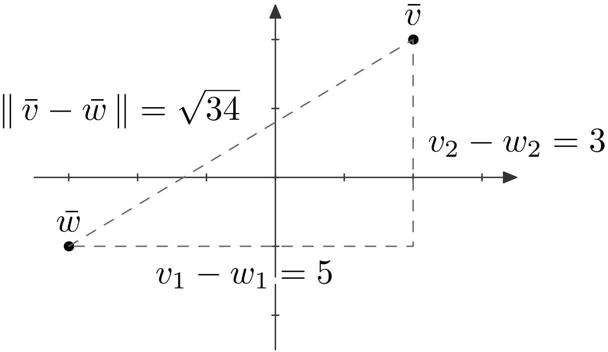
Määritelmä

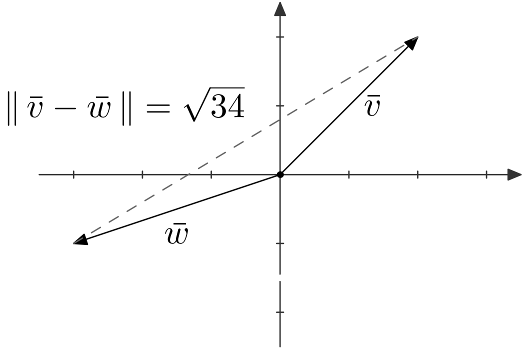
Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen etäisyys on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \| \bar{v} - \bar{w} \|.$$

Esimerkki

Määritä vektoreiden $\bar{v} = (2, 2)$ ja $\bar{w} = (-3, -1)$ välinen etäisyys.


$\bar{v}$
$\| \bar{v} - \bar{w} \| = \sqrt{34}$
$v_2 - w_2 = 3$
$\bar{w}$
$v_1 - w_1 = 5$


$\| \bar{v} - \bar{w} \| = \sqrt{34}$
$\bar{v}$
$\bar{w}$

Määritelmä

Vektorien $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ välinen kulma on se kulma α, jolle pätee

- $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ja
- $\cos \alpha = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\| \bar{v} \| \, \| \bar{w} \|}$.

Tätä määritelmää varten on osoitettava, että

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\| \bar{v} \| \, \| \bar{w} \|} \leq 1$$

kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$,

Esimerkki

Määritä vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ välinen kulma α.

Miksi vektorien välinen kulma määritellään niin kuin se määritellään?