Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

2.10.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Tehtävät on tarkistettu. Suurin osa ratkaisuista oli jälleen erinomaisia!
- Viikon 1 tehtävät on poistettu laatikoista. Ne löytyvät pajaluokan sivupöydän hyllyköstä. Tästä lähin vanhimmat tehtävät löytyvät aina sieltä.

Determinantin laskeminen

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (4 + 2) - 3 \cdot (0 + 1) - 2 \cdot (0 - 1)$$

$$= -13 = -2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = -13.$$

Determinantti kertoo kääntyvyydestä

Lause

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Matriisi A on kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.

Determinantin kehityskaavat

Kehittämisessä voi käyttää muitakin kuin ensimmäistä riviä. Myös sarakkeet käyvät.

Lasketaan matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

determinantti kehittämällä se aluksi kolmannen rivin ja sitten kolmannen sarakkeen suhteen.

Shakkilautasääntö

Kehityskaavojen plus- ja miinusmerkkien vaihtelu:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

Tehtäviä

Määritä seuraavien matriisien determinantit:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lause

Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$-matriiseja. Tällöin

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Determinantin ominaisuuksia

Lause

Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Tällöin

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Determinantin ominaisuuksia

Lause

Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Tällöin

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Matriisin rivit ja sarakkeet käyttäytyvät siis determinantissa samalla tavalla.

Alkeisrivitoimitusten vaikutus determinanttiin

Lause

Oletetaan, että A on neliömatriisi.

(a) Jos matriisi B saadaan matriisista A vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin $\det(B) = -\det(A)$.

(b) Jos matriisi B saadaan matriisista A kertomalla jokin rivi reaaliluvulla $t \neq 0$, niin $\det(B) = t\det(A)$.

(c) Jos matriisi B saadaan matriisista A lisäämällä johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla k kerrottuna, niin $\det(B) = \det(A)$.

Esimerkki

Jos matriisin kaksi riviä (saraketta) vaihtaa keskenään, niin determinantin etumerkki muuttuu:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

Esimerkki

Jos matriisin rivillä (sarakkeessa) kaikilla alkioilla on yhteinen tekijä, niin tuon yhteisen tekijän voi ottaa determinantin eteen kertoimeksi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Esimerkki

Jos matriisin riviin (sarakkeeseen) lisätään jokin toinen rivi (sarake) vakiolla kerrottuna, niin matriisin determinantti ei muutu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Tehtäviä

Oletetaan, että

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

Määritä

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix}.$$

Eräiden matriisien determinantteja

Lause

Oletetaan, että A on neliömatriisi. Tällöin

(a) jos matriisissa A on nollarivi (nollasarake), niin $\det(A) = 0$

(b) jos matriisissa A on kaksi samaa riviä (samaa saraketta), niin $\det(A) = 0$

(c) jos A on kolmiomatriisi (eli kaikki lävistäjän alapuoliset tai yläpuoliset alkiot ovat nollia), niin matriisin A determinantti on lävistäjäalkioiden tulo.

PISTETULO

Määritelmä

Vektoreiden $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

Esimerkki

Määritä vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ pistetulo.

Lause

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$

Pistetulon ominaisuuksia

Lause

Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

a) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$

b) $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Normi eli pituus

Määritelmä

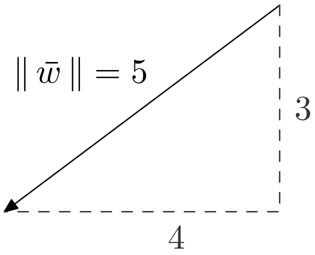
Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli pituus on

$$\| \bar{v} \| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Esimerkki

Määritä vektorin $\bar{v} = (-3, -4)$ normi.

Normi



Mitkä seuraavista kelpaisivat vapauden määritelmäksi?

Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee

(a) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$, kun $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$

(b) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ vain, jos $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$

(c) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ joillakin $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$

(d) jos $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$, niin $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$

(e) yhtälöllä $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

http://www.smbc-
comics.com/index.php?db=comics&id=2208#comic