Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 12.10.2012 klo 18.00

Tehtävä 15 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tämän harjoituksen tehtävistä.

Tehtäväsarja I

1. Merkitään $\bar{v}_1 = (-1, -3, 1)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\bar{v}_3 = (3, 5, 1)$. Onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa?

2. Merkitään $\bar{v}_1 = (4, 2, 1)$, $\bar{v}_2 = (4, -3, 2)$, $\bar{v}_3 = (4, 12, -1)$. Virittävätkö vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$?

3. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6$ ovat kuusi avaruuden $\mathbb{R}^5$ vektoria. Valitse oikea vaihtoehto:

   (a) Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6$ virittämä aliavaruus *on* / *saattaa olla* / *ei ole* $\mathbb{R}^5$.
   (b) Vektorit $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_6$ *ovat* / *saattavat olla* / *eivät ole* lineaarisesti riippumattomia.

Tehtäväsarja II

4. Merkitään $\bar{w} = (1, 2)$. Piirrä kuva projektiosta $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$, jos

   (a) $\bar{v} = (3, 4)$
   (b) $\bar{v} = (-1, -3)$
   (c) $\bar{v} = (4, -2)$
   (d) $\bar{v} = (-2, -4)$

Merkitään $\bar{u} = (1, -1)$ ja $\bar{a} = (3, -1)$.

5. Määritä laskemalla vektorin $\bar{a}$ projektio vektorin $\bar{u}$ virittämälle aliavaruudelle.

6. Piirrä kuva vektoreista $\bar{a}$, $\bar{u}$ sekä projektiosta $\text{proj}_{\bar{u}}(\bar{a})$. Piirrä kuvaan myös erotusvektori $\bar{a} - \text{proj}_{\bar{u}}(\bar{a})$.

Tehtäväsarja III

7. Oletetaan, että tasolla T on normaali $\bar{n} = (-3, 2, 0)$ ja taso kulkee pisteen $P = (2, -1, -1)$ kautta. Määritä tason T normaalimuotoinen yhtälö ja tutki, onko piste $A = (-2, 1, -1)$ tasossa.

8. Laske $\bar{u} \times \bar{w}$, jos

   (a) $\bar{u} = (0, 1, 1)$ ja $\bar{w} = (3, -1, 2)$ (b) $\bar{u} = (3, -1, 2)$ ja $\bar{w} = (0, 1, 1)$.

9. Merkitään $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, -3)$ ja $C = (0, 0, -2)$. Määritä pisteiden A, B ja C kautta kulkevan tason T normaalimuotoinen yhtälö.

Tehtäväsarja IV

10. Oletetaan, että A ja B ovat samantyyppisiä neliömatriiseja. Päteekö tällöin aina yhtälö $(AB)^2 = A^2B^2$?

11. Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$ -matriiseja. Oletetaan, että matriisi B on kääntyvä. Osoita, että $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$.

Tehtäväsarja V

Olkoon $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y - z = 0\}$.

12. Osoita, että V on joidenkin vektorien virittämä aliavaruus etsimällä sopivat virittäjävektorit.

13. Etsi kanta aliavaruudelle V ja määritä $\dim(V)$.

14. Vektori $\bar{u} = (13, 6, 8)$ on aliavaruuden V alkio. Määritä vektorin $\bar{u}$ koordinaatit löytämäsi kannan suhteen.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi tehtävä. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tämän harjoituksen tehtävistä. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

15. Sanotaan, että matriisit A ja B *kommutoivat*, jos pätee $AB = BA$.

    Tutkitaan 2×2-matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että ainoat joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisit, jotka kommutoivat kaikkien muiden 2×2-matriisien kanssa, ovat skalaarimatriisit

    $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{missä } a \in \mathbb{R}.$$

    Vihje: Oleta, että matriisi A kommutoi kaikkien joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisien kanssa. Tällöin A:n täytyy kommutoida muun muassa matriisien

    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    kanssa. Mitä voit tällöin päätellä matriisista A?