Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 5.10.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 19.10.2012 klo 18.00

Tehtävä 16 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

Tehtäväsarja I

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Tutki, onko matriisi A kääntyvä. Jos on, määritä sen käänteismatriisi A^{-1}.
2. Tutki, onko matriisi B kääntyvä. Jos on, määritä sen käänteismatriisi B^{-1}.
3. Toinen edellisten tehtävien matriiseista on kääntyvä. Kirjoita sen käänteismatriisi alkeismatriisien tulona.

Tehtäväsarja II

Oletetaan, että A, B ja C ovat samankokoisia neliömatriiseja.

4. Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Osoita, että jos $AB = AC$, niin $B = C$.

   Neuvo: Väite on muotoa ”jos . . . niin”. Aloita siis olettamalla, että $AB = AC$. Osoita, että siitä seuraa $B = C$.

5. Oletetaan, että $A \neq O$. Osoita, että ehdosta $AB = AC$ ei välttämättä seuraa $B = C$.

   Neuvo: Vastaesimerkki.

6.* Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Osoita, että tällöin myös matriisi AB on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $B^{-1}A^{-1}$.

Tehtäväsarja III

7. Laske $\det(A)$ ja päättele, onko matriisi A kääntyvä, jos

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Oletetaan, että A ja B ovat 4×4 -matriiseja, joille pätee $\det(A) = 3$ ja $\det(B) = -2$. Määritä

$$\text{(a)}\quad \det(AB) \qquad \text{(b)}\quad \det(B^{-1}A) \qquad \text{(c)}\quad \det(2A) \qquad \text{(d)}\quad \det(-3B^T).$$

Tehtäväsarja IV

9.* Yhtälöryhmän matriisia on muokattu alkeisrivitoimituksilla päätyen alla olevaan porrasmatriisiin. Päättele, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Millä perusteella voit sulkea muut vaihtoehdot pois?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3 & -b \\ 0 & 1 & b & a & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Tässä a ja b ovat reaalilukuja.

Tehtäväsarja V

Seuraavissa tehtävissä oletetaan, että $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

10. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{0})$ on sidottu.

11. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$, missä $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Onko jono $(\bar{v}_2 - \bar{v}_3,\ \bar{v}_1 - \bar{v}_3,\ \bar{v}_1 - \bar{v}_2)$ vapaa?

Tehtäväsarja VI

12. Määritä pistetulo $\bar{u} \cdot \bar{w}$, normi $\|\bar{u}\|$ ja vektorin $\bar{u}$ suuntainen yksikkövektori, jos

$$\text{(a) } \bar{u} = (-1, 2) \text{ ja } \bar{w} = (3, 1) \qquad \text{(b) } \bar{u} = (1, 2, 3) \text{ ja } \bar{w} = (2, 3, 1).$$

Piirrä a-kohdan tilanteesta havainnollistava kuva.

13. Määritä vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma, jos

$$\text{(a) } \bar{u} = (3, 0) \text{ ja } \bar{w} = (-1, 1) \qquad \text{(b) } \bar{u} = (3, 4, -1) \text{ ja } \bar{w} = (1, -1, 1)$$

Piirrä a-kohdan tilanteesta havainnollistava kuva.

Seuraavissa tehtävissä oletetaan, että $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ ja $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$.

14. Merkitään $\bar{a} = 3\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{b} = \bar{v} + \bar{w}$. Määritä $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

15. Määritä $\|\bar{v} + 2\bar{w}\|$.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi tehtävä. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

16. Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w} \in \mathbb{R}^m$ ja $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatio. Osoita, että

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w}).$$

Muista, että kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.