Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 28.9.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 12.10.2012 klo 18.00

Tehtävä 16 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

Tehtäväsarja I

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

$$A + C, \quad 2B - 3C.$$

2. Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

$$BC, \quad CA, \quad AC, \quad A^2, \quad B^5.$$

Tehtäväsarja II

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (2, 3)$.

3.* Osoita, että jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Muista perustella vastauksesi huolellisesti.

4. Määritä vektorin $\bar{w} = (2, 4)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

5. Määritä piirroksen avulla vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$, jonka koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat 3 ja -2.

6. Määritä laskujen avulla vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$, jonka koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat 3 ja -2.

Tehtäväsarja III

7. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Osoita, että matriisin A käänteismatriisi on B ja päättele tästä, että A on kääntyvä.

8. Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 - 3A + I = O$. Osoita, että matriisi A on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $3I - A$.

Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia, mitkä epätosia? Muista, että tällainen väite osoitetaan epätodeksi antamalla vastaesimerkki.

9. Jos AB ja BA ovat määriteltyjä, niin A ja B ovat neliömatriiseja.

10. Jos AB ja BA ovat määriteltyjä, niin AB ja BA ovat neliömatriiseja.

11.* Jos $AB = O$, niin $A = O$ tai $B = O$.

Tehtäväsarja IV

12. Mitkä seuraavista matriiseista ovat alkeismatriiseja? Perustele vastauksesi lyhyesti antamalla alkeismatriisia vastaava alkeisrivitoimitus tai syy, miksi kysymyksessä ei ole alkeismatriisi.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehtäväsarja V

Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

13. Oletetaan, että vektorit $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat yhdensuuntaiset. Osoita, että jono $(\bar{v}, \bar{w})$ on sidottu.

14. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Oletetaan lisäksi, että jono $(\bar{v}, \bar{w})$ on sidottu. Osoita, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat yhdensuuntaiset.

    Olet nyt osoittanut, että kahden nollasta poikkeavan vektorin muodostama jono on sidottu, jos ja vain jos vektorit ovat yhdensuuntaiset. Toisin sanoen kahden nollasta poikkeavan vektorin muodostama jono on vapaa, jos ja vain jos vektorit eivät ole yhdensuuntaiset.

15.* Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Osoita, että jono $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2,\ \bar{v}_2 + \bar{v}_3,\ \bar{v}_3)$ on vapaa. Muista perustella vastauksesi huolellisesti.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi tehtävä. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

16. Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ on kääntyvä. Oletetaan myös, että avaruuden $\mathbb{R}^m$ jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoita, että jono $(A\bar{v}_1, \ldots, A\bar{v}_k)$ on vapaa.