Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 21.9.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 5.10.2012 klo 18.00

Tehtävällä 14 voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

1. Merkitään $\bar{v}_1 = (-3, 4)$ ja $\bar{v}_2 = (\frac{3}{2}, -2)$. Piirrä kuva aliavaruuksista $\operatorname{span}(\bar{v}_1)$ ja $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Vastausta ei tarvitse perustella täsmällisesti.

2. Yhtälöryhmien matriiseja on muokattu alkeisrivitoimituksilla päätyen alla oleviin matriiseihin. Päättele suoraan matriisista, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

$$\text{(a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \qquad \text{(b)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 100 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & 8 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3.* Merkitään $\bar{v}_1 = (0, 0, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$ ja $\bar{v}_4 = (1, 0, 1)$. Osoita, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ ja $\bar{v}_4$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

   Neuvo: Oleta, että $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, ja osoita, että $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$.

4. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ ja $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että $a\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$.

Tehtäväsarja II

5. Tutki vapauden määritelmän avulla, onko vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa, jos $\bar{v}_1 = (1, 5)$ ja $\bar{v}_2 = (-5, -1)$. Havainnollista tilannetta kuvalla.

6. Onko vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa, jos $\bar{v}_1 = (3, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (-6, -2)$? Havainnollista tilannetta kuvalla.

Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 2, -1, 2)$, $\bar{w}_2 = (0, -1, 1, 1)$ ja $\bar{w}_3 = (1, -2, 0, 3)$.

7.* Halutaan selvittää, onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

   Kun yhtälöryhmän matriisi muokataan redusoiduksi porrasmatriisiksi, on tuloksena matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaudesta? Perustele vastauksesi.

8. Mikä ehto vektorin $\bar{u} \in \mathbb{R}^4$ komponenttien pitää toteuttaa, jotta $\bar{u} \in \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$?

9. Keksi jokin sellainen vektori $\bar{w}_4$, että jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4)$ on vapaa. Edellisestä tehtävästä on apua.

Tehtäväsarja III

Merkitään $\bar{v}_1 = (0, 0, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$.

10. Osoita, että jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

11. Määritä vektorin $\bar{v} = (2, 1, 2)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

Tehtäväsarja IV

12. Pienen paahtimon valikoimissa on kolme eri kahvisekoitusta. Perussekoituksessa on 300 g kolumbialaisia ja 200 g meksikolaisia papuja. Erikoissekoituksessa on 200 g kolumbialaisia, 200 g kenialaisia ja 100 g meksikolaisia papuja. Gourmet-sekoituksessa on 100 g kolumbialaisia, 200 g kenialaisia ja 200 g meksikolaisia papuja. Varastossa on 30 kg kolumbialaisia, 15 kg kenialaisia ja 25 kg meksikolaisia papuja. Kuinka monta 500 g pussia pitäisi kutakin sekoitusta valmistaa, jotta koko varasto tulisi käytettyä?

    Neuvo: Muotoile tilannetta kuvaava yhtälöryhmä ja ratkaise se.

13. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = b\,. \end{cases}$$

    Määritä ne reaaliluvut a ja b, joilla yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi tehtävä. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

14. Selvitä, millainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko on vektoreiden $\bar{v}_1 = (1, -2, -6)$, $\bar{v}_2 = (0, 3, 6)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, -1, 0)$ virittämään aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Onko se suora, taso vai jotain muuta?