Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 14.9.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 28.9.2012 klo 18.00

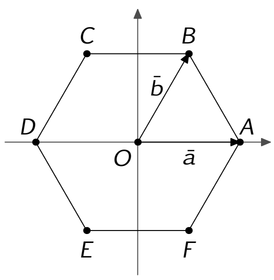
Tehtävä 15 on hieman haastavampi tehtävä, ja voit korvata sillä minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

Tehtäväsarja I

1. Onko piste $(2, 3, 1)$ suoralla $S = \{(4, 1, -1) + k(-2, 1, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}$? Entä piste $(10, -2, 2)$?

2. Tutkitaan suoraa, jonka yhtälö on $y = 3x - 1$. Kirjoita suora muodossa $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja piirrä tilannetta havainnollistava kuva.

3. Oheisessa kuvassa pisteet $A, B, \ldots, F$ ovat säännöllisen kuusikulmion kärkipisteitä. Kuusikulmion keskipisteenä on origo. Lausu vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla suuntajanat $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ ja $\overline{CF}$.



Tehtäväsarja II

4. Muuta matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

alkeisrivitoimituksilla ensin porrasmatriisiksi ja sen jälkeen redusoiduksi porrasmatriisiksi.

5. Ratkaise Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Käytä hyväksesi edellistä tehtävää.

6. Ratkaise Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

7. Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla oleviin matriiseihin. Määritä yhtälöryhmien ratkaisut.

$$\text{(a)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{(b)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

8.* Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla oleviin matriisiin

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Määritä yhtälöryhmän ratkaisu.

Tehtäväsarja III

9. Tutki piirtämällä, onko vektori $\bar{a} = (2, 6)$ mahdollista esittää vektoreiden $\bar{u} = (1, -1)$ ja $\bar{v} = (1, 1)$ lineaarikombinaationa. Jos mahdollista, määritä kuvastasi kertoimet s ja t, joilla $\bar{a} = s\bar{u} + t\bar{v}$.

10. Merkitään $\bar{v}_1 = (2, 0, 1, 4)$, $\bar{v}_2 = (1, 2, 0, 0)$, $\bar{v}_3 = (3, 1, 0, 2)$ ja $\bar{w} = (4, -4, 3, 12)$. Halutaan tietää, kuuluuko vektori $\bar{w}$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ virittämään aliavaruuteen $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Toisin sanoen on selvitettävä, onko vektori $\bar{w}$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio. Muodosta yhtälöryhmä, jonka ratkaisu antaa vastauksen kysymykseen.

11. Ratkaise edellisen tehtävän yhtälöryhmä. Päteekö $\bar{w} \in \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$?

12.* Jatkoa edelliseen tehtävään. Kuuluuko vektori $\bar{v}_3$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{w}$ virittämään aliavaruuteen $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w})$?

Neuvo: Muista, että pelkät laskut eivät riitä, vaan sinun on selitettävä, mitä teet.

13. Joukko $W = \{(s+t,\ 4s+t,\ s-t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$ on kahden vektorin virittämä aliavaruus. Määritä jotkin sen virittäjävektorit.

Tehtäväsarja IV

14. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Osoita yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun määritelmien nojalla, että $c(\bar{v}+\bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi tehtävä. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tämän harjoituksen tähdettömistä tehtävistä.

15. Oletetaan, että $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\bar{u}$, $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat aliavaruuden

$$\mathrm{span}(\bar{u},\ \bar{u}+\bar{v},\ \bar{u}+\bar{w}+\bar{v})$$

alkioita.