1. Ratkaisu: Palautetaan integraaliyhtälö differentiaaliyhtälöksi. Nyt

$$\phi'(s) = 2 + \int_0^s \phi(t)dt$$

ja $\phi(0) = 0$ ja $\phi'(0) = 0$. Derivoimalla toiseen kertaan saadaan $\phi''(s) = \phi(s)$. Differentiaaliyhtälöiden aiemmilta kursseilta tiedetään, että tällöin

$$\phi(s) = A\cosh(s) + B\sinh(s).$$

Ratkaistaan A ja B.

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \phi(s) = B\sinh(s)$$

ja

$$\phi'(0) = 2 \Rightarrow B = 2.$$

Siis $\phi(s) = 2\sinh(s)$.

2. Tämän tehtävän voi tehdä samalla tavalla kuin tehtävän 1. mutta käytetään nyt iterointia. Tiedetään, että

$$\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(s) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \phi_n(s)$$

Nyt $\phi_0(s) = f(s) = s^3$ ja $\phi_{n+1}(s) = \int_0^s (s-t)\phi_n(t)dt$. Edelleen

$$\phi_1(s) = \int_0^s (s-t)t^3 dt = \frac{1}{4\cdot 5}s^5$$

$$\phi_2(s) = \int_0^s (s-t)\frac{1}{4\cdot 5}t^5 dt = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}s^7$$

Osoitetaan induktiolla että

$$\phi_n(s) = \frac{6}{(2n+3)!}s^{2n+3}\ ,\ n \in N.$$

Selvästi yhtälö on voimassa indekseillä $0, 1$ ja 2. Nyt

$$\phi_{n+1}(s) = \int_0^s (s-t)\frac{6}{(2n+3)!}t^{2n+3}dt$$

$$= \Big/_0^s \frac{6\cdot st^{2n+4}}{(2n+3)!(2n+4)} - \Big/_0^s \frac{6\cdot t^{2n+5}}{(2n+3)!(2n+5)}$$

$$= \frac{6 \cdot t^{2n+1}}{(2n+5)!}$$

Siis

$$\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n \cdot 6}{(2n+3)!} s^{2n+3}$$

kaikilla $s \in R$.

3. Derivoidaan annettu yhtälö, jolloin

$$y''(s) - 1 + \int_0^s 2ty(t)dt = 1.$$

Derivoidaan toisen kerran

$$\begin{aligned} & y'(s) - 0 + 2\int_0^s \int_0^r ty(t)dtdr \\ &= y'(s) + 2\int_0^s \int_r^s drty(t)dt \\ &= y'(s) - 2\int_0^s t(s-t)y(t)dt = s. \end{aligned}$$

Derivoidaan vielä kerran

$$\begin{aligned} & y(s) - 2\int_0^s \int_0^r t(r-t)y(t)dtdr \\ &= y(s) - 2\int_0^r t\int_r^s (r-t)dry(t)dt \\ &= y(s) - 2\int_0^r t\frac{(s-t)^2}{2}y(t)dt = \frac{1}{2}s^2 \end{aligned}$$

Siis $y(s) - \int_0^s t(s-t)^2y(t)dt = \frac{1}{2}s^2$.

6. Todistetaan väite induktiolla. Osoitetaan että väite pätee kun $n = 2$. Nyt

$$K^{(2)}(s,t) = \int_t^s K(s,r)K^{(1)}(r,t)dr = \int_t^s K^{(1)}(s,r)K(r,t)dr.$$

Oletetaan, että

$$K^{(n)}(s,t) = \int_t^s K^{(n-1)}(s,r)K(r,t)dr.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
K^{(n+1)}(s,t) &= \int_t^s K(s,r)K^{(n)}(r,t)dr \\
&= \int_t^s K(s,r)\int_t^r K^{(n-1)}(r,u)K(u,t)dudr \\
&= \int_t^s \int_u^s K(s,r)K^{(n-1)}(r,u)drK(u,t)du \\
&= \int_t^s K^{(n)}(s,u)K(u,t)du.
\end{aligned}$$