

7. Parakompaktisuus

Määntellään ensin muutamia peitteisiin liittyviä käsitteitä:

Määr. 7.1. Olk. \mathbb{X} avaruus. Perhe $(A_j)_{j \in J}$ \mathbb{X} in osajoukkoja on lokaalisti äärellinen, jos $\forall x \in \mathbb{X}$ \exists ymp. U_x s.e. $U_x \cap A_j \neq \emptyset$ vain äärellisen monella indeksillä j .
Perhe $(A_j)_{j \in J}$ on pisteäärellinen (point-finite), jos $\forall x \in \mathbb{X}$: $x \in A_j$ vain äärell. monella indeksillä j .

Selvästi lokaalisti äärell. perhe on pisteäärellinen.

- Esim. • perhe $\{[-n, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ei ole pisteäärellinen.
• perhe $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ on pisteäärellinen, mutta ei lok. äärellinen.
• perhe $\{[n, \infty[\mid n \in \mathbb{N}\}$ on lokaalisti äärellinen.

Kuten välillä kirjassa, kääntellään peitteitä indeksöityinä, t.s. avaruuden \mathbb{X} peite on sellainen perhe $(A_j)_{j \in J}$, että $\mathbb{X} = \bigcup_{j \in J} A_j$. Peite on avoin, jos sen jokainen jäsen A_j on avoin.

Jatkuvan funktion $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ kanta (engl. support) on joukko

$$\text{spt}(g) = \overline{\{x \in \mathbb{X} \mid g(x) \neq 0\}}$$

Nollafunktion kanta on \emptyset .

Olk. $(g_j)_{j \in J}$ perhe jatkuvia funktioita $g_j: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ s.e. perhe $(\text{spt}(g_j))_{j \in J}$ on lokaalisti äärellinen.
Erityisesti joukko $K(x) = \{j \in J \mid g_j(x) \neq 0\}$ on äärellinen $\forall x \in \mathbb{X}$.
Asettamalla

$$g(x) = \sum_{j \in K(x)} g_j(x)$$

saadaan funktio $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, merk. $g = \sum_{j \in J} g_j$.

Jos $x \in \mathbb{X}$, niin x illä on ympäristö U , jossa funktio g on äärellinen summa jatkuvista funktioista; siis g on jatkuva U :ssa. Siis g on jatkuva jokaisen pisteen eräessä ympäristössä, joten g on jatkuva koko \mathbb{X} :ssä.

Määr. 7.2. Perhe $(g_j)_{j \in J}$ jatkuvia funktioita $g_j: \mathbb{X} \rightarrow I$

(engl. partition of unity)

on ykkösen ositus, jos

- 1) perhe $(\text{spt}(g_j))_{j \in J}$ on lokaalisti äärellinen
- 2) $\sum_{j \in J} g_j(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{X}$.

Koska jokaisessa pisteessä jokin $g_j(x) > 0$, niin $(\text{spt}(g_j))_{j \in J}$ on \mathbb{X} 'in lokaalisti äärellinen peite.

Esim. jos $\mathbb{X} = [0, 1]$, funktiot $x \mapsto x$ ja $x \mapsto 1-x$ muodostavat ykkösen osituksen,

(Esi-kuva)

Olk. $(U_j)_{j \in J}$ avaruuden \mathbb{X} avoin peite. Sanomme, että ykkösen ositus $(g_j)_{j \in J}$ on peitteeseen $(U_j)_{j \in J}$ sopiva, jos $\text{spt}(g_j) \subset U_j \quad \forall j \in J$.
(engl. partition of unity subordinated to the covering $(U_j)_{j \in J}$)

Lause 7.3. Jos $(A_j)_{j \in J}$ on lokaalisti äärellinen perhe suljettuja joukkoja, niin yhdiste $\bigcup \{A_j \mid j \in J\}$ on suljettu.

Tod. HT.

□

Lemma 7.4. olk. (\mathbb{X}, d) metrinen avaruus, jonka läpimitta $d(\mathbb{X}) \leq 1$, ja olkoon $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ \mathbb{X} 'in avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen ykkösen ositus $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, että $\text{spt}(g_n) \subset \bar{U}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Tod. Jos $U_k = \mathbb{X}$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, valitaan $g_k \equiv 1$, $g_n \equiv 0$, $n \neq k$.

Ol. nyt, että $U_n \neq \mathbb{X} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Merk. $V_1 = \emptyset$, $V_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$, $n \geq 2$.

Määr. $f_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = d(x, \mathbb{X} \setminus U_n) - n \cdot d(x, \mathbb{X} \setminus V_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

ja $h_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h_n(x) = \max\{f_n(x), 0\}.$$

Selvästi f_n ja h_n ovat jatkuvia ja $\text{spt}(h_n) \subset \bar{U}_n$

(jos $x \notin U_n$, on $d(x, \mathbb{X} \setminus U_n) = 0$ ja siis $f_n(x) \leq 0$ ja $h_n(x) = 0$).

Osoitetaan, että perhe $(spt(h_n))$ on lokaalisti äärellinen:

olk. $y \in \mathbb{X}$. Val. $k \in \mathbb{N}$ s.e. $y \in U_k$ ja luku $r > 0$, jolla $B(y, 2r) \subset U_k$. Riittää osoittaa, että kuula $W = B(y, r)$ ei kohtaa joukkoja $spt(h_n)$, kun $n > \frac{1}{r}$ ja $n > k$.
olk. $x \in W$. Koska $U_k \subset V_n$ ($n > k$), niin

$$(*) \quad d(x, \mathbb{X} \setminus V_n) \geq d(x, \mathbb{X} \setminus U_k) \geq \underbrace{d(y, \mathbb{X} \setminus U_k)}_{\geq 2r} - \underbrace{d(x, y)}_{< r} > r.$$

Koska $d(\mathbb{X}) \leq 1$, saadaan

$$f_n(x) < 1 - nr < 0.$$

\uparrow \uparrow
 $(*)$ $n > \frac{1}{r}$

Siis $h_n(x) = 0 \quad \forall x \in W$, joten $W \cap spt(h_n) = \emptyset$.

Voidaan siis määritellä jatkuva funktio $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n: \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty[$.

Lisäksi $h(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$, sillä jos n on pienin luku, jolle $x \in U_n$, niin $x \notin V_n$, joten $f_n(x) = d(x, \mathbb{X} \setminus U_n) > 0$ ja siis $h(x) \geq h_n(x) > 0$.

Funktiot $g_n: g_n(x) = \frac{h_n(x)}{h(x)}$ muodostavat vaaditun ylläkösen osituksen $(\sum g_n(x) = \frac{\sum h_n(x)}{h(x)} = 1)$.



Lause 7.5. Metristyvässä N_2 -avaruudessa \mathbb{X} on jokaista avointa peitettä kohti olemassa siihen sopiva ylläkösen ositus.

Tod. Olk. $(U_i)_{i \in I}$ \mathbb{X} :n avoin peite. Topologia I: 10.6 \Rightarrow
 $\exists \mathbb{X}$:n metriikka, joka määrittää \mathbb{X} :n topologian ja jossa $d(\mathbb{X}) \leq 1$.

Kullakin $x \in \mathbb{X}$ val. $i(x) \in I$, jolla $x \in U_{i(x)}$ ja luku $r(x) > 0$, jolla $B(x, 2r(x)) \subset U_{i(x)}$. Kuulat $B(x, r(x))$, $x \in \mathbb{X}$, muodostavat \mathbb{X} :n avoimen peitteen. N_2 -avaruus on aina Lindelöf (Väisälä: Lause 12.14), joten tällä peitteellä on numeroituva osapeite, t.s. void. valita \mathbb{X} :n jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s.e. kuulat $B(x_n, r(x_n))$, $n \in \mathbb{N}$, peittävät \mathbb{X} :n.

Lemman 7.4. nojalla \exists yksiksen ositus $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, jolla $\text{spt}(g_n) \subset \bar{B}(x_n, r(x_n)) \subset U_i(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Kun $j \in J$, merk. $K(j) = \{n \in \mathbb{N} \mid i(x_n) = j\}$ ja määr.

$$h_j: \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$$
$$(*) \quad h_j(x) = \sum_{n \in K(j)} g_n(x).$$

Jos $K(j) = \emptyset$, määr. $h_j \equiv 0$.
Huom. koska perhe $(\text{spt}(g_n))$ on lok. äärellinen, niin $\left. \begin{matrix} \text{(kiinteällä } x \text{:n arvolla)} \\ \text{summassa } (*) \end{matrix} \right\}$ on vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä.

Funktiot h_j ovat jatkuvia
 $\text{spt}(h_j) \subset U_j \quad \forall j \in J$
Perhe (h_j) on haettu yksiksen ositus. } HT



Määr. 7.6. Olk. $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ja $\{B_\beta \mid \beta \in B\}$ kaksi avoimuden \mathbb{X} peitettä. Sanomme, että peite $\{B_\beta\}$ on peitteen $\{A_\alpha\}$ tihennys (engl. refinement)
 $\forall \beta \in B \exists \alpha \in A$ s.e. $B_\beta \subset A_\alpha$. Merk. $\{B_\beta\} \ll \{A_\alpha\}$
Tihennys on tarkka (precise), jos
 $A = B$ ja $B_\alpha \subset A_\alpha \quad \forall \alpha \in A$.

Määr. 7.7. Hausdorffin avaruus \mathbb{X} on parakompakti, jos jokaisella \mathbb{X} :n avoimella peitteellä on avoin lokaalisti äärellinen tihennys.

Lause 7.8. Olk. $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ja $\{B_\beta \mid \beta \in B\}$ avoimuden \mathbb{X} peitteitä. Tällöin

- 1) $\{A_\alpha \cap B_\beta \mid (\alpha, \beta) \in A \times B\}$ on \mathbb{X} :n peite, joka on sekä $\{A_\alpha\}$:n että $\{B_\beta\}$:n tihennys.
Jos $\{A_\alpha\}$ ja $\{B_\beta\}$ ovat lokaalisti äärellisiä (vast. pisteäärellisiä) niin $\{A_\alpha \cap B_\beta\}$ on lok. äärellinen (vast. pisteäärellinen).
- 2) Jokainen peitteiden $\{A_\alpha\}$ ja $\{B_\beta\}$ yhteinen tihennys (siis peite $\{C_\gamma\}$, jolle $\{C_\gamma\} \ll \{A_\alpha\}$ ja $\{C_\gamma\} \ll \{B_\beta\}$) on myös peitteen $\{A_\alpha \cap B_\beta\}$ tihennys.

Tod. HT.

□

Lause 7.9. Jos perheellä $\{A_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on pisteäärellinen (vast. lok. äärellinen) tiheys $\{B_\beta \mid \beta \in B\}$, niin sillä on myös tarkka pisteäärellinen (vast. lok. äärellinen) tiheys $\{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$.
Lisäksi, jos jokainen B_β on avoin, niin myös joukot C_α voidaan valita avoimiksi.

Tod. Määritellään funktio $\varphi: B \rightarrow A$, joka jokaiseen $\beta \in B$ liittää jonkin $\alpha \in A$, jolle $B_\beta \subset A_\alpha$.
Jokaiselle α , olkoon $C_\alpha = \bigcup \{B_\beta \mid \varphi(\beta) = \alpha\}$;
jotkin C_α voivat olla tyhjiä. Selvästi $C_\alpha \subset A_\alpha \forall \alpha$, ja myös $\{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on perhe, koska jokainen B_β sisältyy johonkin C_α saan. Samoin on selvää, että C_α on avoin, jos joukot B_β ovat avoimia.
Jos $\{B_\beta\}$ on pisteäärellinen, niin jokainen $x \in \bar{X}$ kuuluu vain äärelliseen määrään B_β ja siis korkeintaan yhteen C_α .
Vastaavasti, jos $\{B_\beta\}$ on lok. äärellinen, niin jokaisella $x \in \bar{X}$ on ympäristö U , joka kohtaa vain äärellisen monta joukosta B_β . Tämä ympäristö kohtaa siis korkeintaan näin monta joukosta C_α .

□

Teoreema 7.10. Jokainen parakompakti avoimien normaali.

Tod. Osi ensin, että \bar{X} on säännöllinen. Olk. $x \in \bar{X}$, $A \in \bar{X}$, $x \notin A$.
Koska X on Hausdorff, on jokaisella $a \in A$ ympäristö U_a s.e. $x \notin \bar{U}_a$. Koska $\{U_a \mid a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ on \bar{X} :n avoin peite, on sillä parakompaktisuuden ja Lauseen 7.9 nojalla tarkka avoin lok. äärellinen tiheys $\{V_a \mid a \in A\} \cup \{G\}$.
Tällöin $W = \bigcup \{V_a \mid a \in A\}$ on avoin ja sisältää A :n. Lisäksi, koska $\{V_a\}$ on lok. äärellinen, on Lauseen 7.3 nojalla $\bar{W} = \bigcup \{\bar{V}_a \mid a \in A\}$. Koska $x \notin \bar{U}_a \supset \bar{V}_a \forall a \in A$, on siis $x \notin \bar{W}$. Siis $X \setminus \bar{W}$ ja W ovat x :in ja A :n erill. ympäristöt, mikä osoittaa säännöllisyyden.

Normaalisuus: olk. $A, B \in \bar{X}$, $A \cap B = \emptyset$. Säännöllisyydestä seuraa, että $\forall a \in A \exists$ ymp. U_a s.e. $\bar{U}_a \cap B = \emptyset$. Vastaava päättely kuin edellä (missä y korvataan B :llä) antaa A :lle ja B :lle erilliset ympäristöt.

□

Teoreema 7.11. Olk \bar{X} parakompakti. Tällöin jokaisella \bar{X} :n avoimella peitteellä $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on olemassa tähän peitteeseen sopiva yksiköiden ositus.

Tod. Parakompaktisuuden nojalla on olemassa peitteen $\{U_\alpha\}$ tarkka avoin lok. äärellinen hienennys $\{U'_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Voidaan osoittaa (kts. [Dugundji: Topology, VII, 6.1, s. 152], palataan todistukseen myöhemmin, jos ehditään), että normaalisuudesta seuraa: on olemassa lok. äärellinen avoin peite $\{V_\alpha\}$ s.e. $\bar{V}_\alpha \subset U'_\alpha$. Sama uudelleen: saadaan lok. äärellinen avoin peite $\{W_\alpha\}$ s.e. $\bar{W}_\alpha \subset V_\alpha$.

Koska \bar{X} on normaali, löydetään Urysonin lemmän avulla jokaiselle $\alpha \in A$ jatkuva funktio $g_\alpha: \bar{X} \rightarrow I$ s.e. $g_\alpha|_{\bar{W}_\alpha} \equiv 1$ ja $g_\alpha|_{(\bar{X} \setminus V_\alpha)} \equiv 0$ (jos $V_\alpha = \emptyset$, määr. $g_\alpha \equiv 0$).

Siis $\text{spt}(g_\alpha) \subset V_\alpha \subset U_\alpha \forall \alpha \in A$.

Koska $\{W_\alpha\}$ on lok. äärellinen peite, niin jokaisella $x \in \bar{X}$ vähintään 1 mutta vain äärellisen moni funktioista g_α on $\neq 0$. Siis $\sum g_\alpha$ on hyvin määr. funktio $\bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\sum g_\alpha(x) \neq 0 \forall x$. Jatkuvuus: jokaisella pisteellä on ympäristö, jossa vain äärellisen moni funktioista g_α ei ole $\equiv 0$; siis $\sum g_\alpha$ on jatkuva jokaisen pisteen eräissä ympäristöissä, siis koko \bar{X} :ssä.

Haluttu yksiköiden ositus on perhe $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$, missä

$$h_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{\sum g_\alpha(x)}$$

□

Sovellus 7.12. Jos $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on yksiköiden ositus avaruudella \bar{X} ja $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on perhe jatkuvia funktioita $\varphi_\alpha: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$, niin funktio $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum \varphi_\alpha(x) h_\alpha(x)$, on jatkuva.

Itse asiassa funktioiden φ_α ei tarvitse olla määriteltyjä koko \bar{X} :ssä: Jos $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on avoimeen peitteeseen $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sopiva yksiköiden ositus ja $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on perhe jatkuvia funktioita $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, määrittellen funktiot $f_\alpha: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x), & x \in U_\alpha \\ 0, & x \notin U_\alpha \end{cases}$$

Funktiot f_α eivät siis välttämättä ole jatkuvia, Funktio $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum f_\alpha(x) h_\alpha(x)$, kuitenkin on jatkuva (HT).

□