

Henkivakuutusmatematiikka 14.12.2012

1. Lainan määrä on 1000 euroa ja laina-aika 4 vuotta. Laina nostetaan hetkellä 0 ja maksetaan takaisin tasaerinä hetkinä 1, 2, 3 ja 4. Vuosikorko on 3%.

a) Määrää erien suuruudet.

b) Laina muutetaan hetkellä 2 heti toisen erän suorittamisen jälkeen tasalyhenteiseksi laina-aikaa ja maksuhetkiä muuttamatta. Määrää kahden viimeisen erän suuruudet.

2. Yhtiö käyttää vakuutusten hinnoittelussa Makeham-kuolevuutta μ ,

$$\mu(x) = a + be^{cx}, \quad x \geq 0,$$

missä a, b ja c ovat positiivisia vakioita.

a) Määrää x -ikäisen jäljellä olevan elinajan kertymäfunktio.

b) Määrää x -ikäisen elämänvaravakuutuksen nettokertamaksu, kun korvaussumma on S , vakuutuskauden pituus on n ja korkoutuvuus on positiivinen vakio δ .

3. Kertamaksullisessa kuolemanvaravakuutuksessa korvaus kuolinhetkellä on S_1 , jos kuolinhetki on pienempi kuin n (sopimuksen tekohetkestä nolla laskettuna) ja S_2 , jos kuolinhetki on välillä $(n, 2n)$. Olkoon korkoutuvuus $\delta > 0$ vakio, kuolevuus μ jatkuva ja vakuutettu x -ikäinen sopimuksen tekohetkellä.

a) Johda vakuutuksen vastuuvalkaa kuvaavat Thielen yhtälöt.

b) Määrää Thielen yhtälöiden avulla vakuutuksen nettokertamaksu.

4. Kolmen hengen vakuutuksessa vakuutetut ovat sopimuksen tekohetkellä x -, x_1 - ja x_2 -ikäisiä. Vakuutetuille maksetaan yhteensä jatkuvaa eläkettä seuraavasti. Jos elossa on 0, 1 tai 3 vakuutettua, ei makseta mitään. Jos elossa ovat x - ja x_1 -ikäinen tai x - ja x_2 -ikäinen, maksetaan eläkettä intensiteetillä e_1 , ja jos elossa ovat x_1 - ja x_2 -ikäinen, maksetaan eläkettä intensiteetillä e_2 .

Vakuutettujen elinajat ovat riippumattomia, x -ikäisen kuolevuus on μ , x_1 -ikäisen μ_1 ja x_2 -ikäisen μ_2 (μ, μ_1 ja μ_2 ovat positiivisia vakioita). Määrää vakuutuksen nettokertamaksu, kun korkoutuvuus on positiivinen vakio δ .

5. Olkoon kolmitilaisen Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, 2, 3\}$. Olkoot intensiteetit $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{21}$ ja μ_{23} jatkuvia funktioita. Muut intensiteetit ovat nollia. Tilojen tulkinnat ovat 1 = aktiivi, 2 = työkyvytön ja 3 = kuollut. Tarkastellaan sopimusta, jossa vakuutusmaksu maksetaan kertasuorituksella hetkellä nolla ja työkyvyttömälle maksetaan jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\tilde{S}$ välillä $[0, n]$. Korkoutuvuus on positiivinen vakio δ .

a) Esitä Thielen yhtälöt elossaolevan vakuutetun vastuuvalkan määräämiseksi.

b) Oletetaan lisäksi, että $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{21}$ ja μ_{23} ovat vakioita ja että $\mu_{21} = 0$. Määrää vastuuvalka hetkellä $t \in [0, n]$, kun vakuutettu on tällöin työkyvytön.

1. a) $L = A q_n$, $L = 1000$, $n = 4$, A euron summa,

$$q_n = V \cdot \frac{1 - V^n}{1 - V}, \quad V = \frac{1}{1+i}, \quad i = 0.03$$

$$\Rightarrow A = 269$$

b) Leinan määrä heikkellä 2 on $L_2 = (V + V^2)A = 515$

Lyhenne on siis $T = L_2/2$.

Kolmas suositus on $T + iL_2 = 273$

Neljäs suositus on $T + iT = 265$

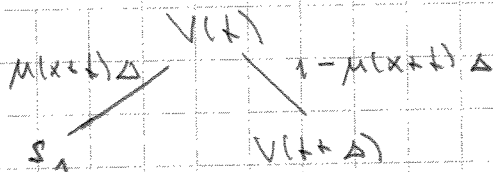
$$2. a) F(t) = P(T(x) \leq t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(x+u) du}$$

$$= 1 - e^{-at - \frac{b}{c} e^c (e^t - 1)}$$

$$b) P = e^{-\delta n} \cdot n p \times S = e^{-(\delta + a)n - \frac{b}{c} e^c (e^n - 1)} S,$$

3. a) $t \in (0, n)$

$t \in (n, 2n)$



$$V(t) = \mu(x+t)\Delta S_1 + (1 - \mu(x+t)\Delta)e^{-\delta\Delta} V(t+\Delta) + o(\Delta)\Delta$$

$$= V(t+\Delta) + \mu(x+t)\Delta S_1 - (\mu(x+t) + \delta)\Delta V(t) + o(\Delta)\Delta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(t) = (\mu(x+t) + \delta) V(t) - \mu(x+t) S_1, & t \in (0, n) \\ V(t) = (\mu(x+t) + \delta) V(t) - \mu(x+t) S_2, & t \in (n, 2n) \end{cases}$$

b) Rannaehdot ovat: $V(0) = P$, $V(2n) = 0$, $V(n-) = V(n)$.

$$\left\{ \begin{aligned} t \in (0, n) &\Rightarrow V(t) = e^{\int_x^{x+t} (\mu(u) + \delta) du} \left[-S_1 \int_0^t e^{-\int_x^{x+s} (\mu(u) + \delta) du} \mu(x+s) ds + G \right] \\ t \in (n, 2n) &\Rightarrow V(t) = e^{\int_x^{x+t} (\mu(u) + \delta) du} \left[-S_2 \int_0^t e^{-\int_x^{x+s} (\mu(u) + \delta) du} \mu(x+s) ds + D \right] \end{aligned} \right.$$

$$V(2n) = 0 \Rightarrow D = S_2 \int_0^{2n} e^{-\int_x^{x+s} (\mu(u) + \delta) du} \mu(x+s) ds$$

$$V(n-) = V(n+) \Rightarrow$$

$$G = S_1 \int_0^n e^{-\int_x^{x+s} (\mu(u) + \delta) du} \mu(x+s) ds + S_2 \int_n^{2n} e^{-\int_x^{x+s} (\mu(u) + \delta) du} \mu(x+s) ds$$

$$V(0) = P \Rightarrow P = G$$

4. Luenfajan markkniin

classa

x
 x_1
 x_2
 $x_1 x_1$
 $x_1 x_2$
 $x_1 x_2$
 $x_1 x_1 x_2$

$$\begin{aligned} 0 &= G_x \\ 0 &= G_{x_1} \\ 0 &= G_{x_2} \\ e_1 &= G_x + G_{x_1} + G_{x x_1} \\ e_1 &= G_x + G_{x_2} + G_{x x_2} \\ e_2 &= G_{x_1} + G_{x_2} + G_{x_1 x_2} \\ 0 &= G_x + G_{x_1} + G_{x_2} + G_{x x_1} + G_{x x_2} \\ &\quad + G_{x_1 x_2} + G_{x x_1 x_2} \end{aligned}$$

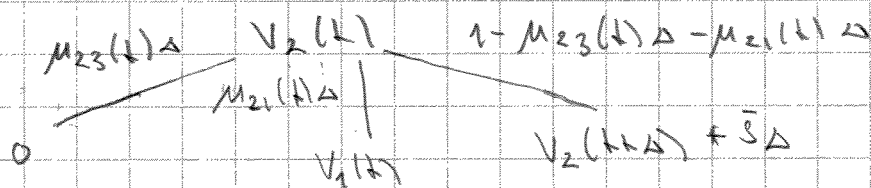
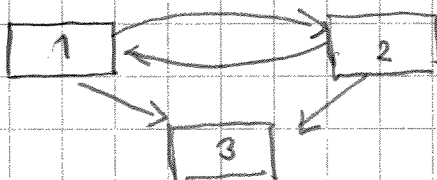
$$\Rightarrow \begin{cases} G_{x_1} = G_{x_2} = G_x = 0, & G_{x x_1} = G_{x x_2} = e_1, & G_{x_1 x_2} = e_2 \\ G_{x x_1 x_2} = -2e_1 - e_2 \end{cases}$$

$$P = e_1 (\bar{a}_{x x_1} + \bar{a}_{x x_2}) + e_2 \bar{a}_{x_1 x_2} - (2e_1 + e_2) \bar{a}_{x x_1 x_2}$$

Esi' markkniin

$$\bar{a}_{x x_1} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-(\mu + \mu_1)t} dt = \frac{1}{s + \mu + \mu_1}$$

5. a)



$$V_2(t) \approx \mu_{21}(t)\Delta V_1(t) + (1 - \mu_{23}(t)\Delta - \mu_{21}(t)\Delta) e^{-\delta\Delta} V_2(t+\Delta) + \bar{\delta}\Delta$$

$$\Rightarrow V_2'(t) = (\delta + \mu_{21}(t) + \mu_{23}(t)) V_2(t) - \mu_{21}(t) V_1(t) - \bar{\delta}$$

$$V_1'(t) = (\delta + \mu_{12}(t) + \mu_{13}(t)) V_1(t) - \mu_{12}(t) V_2(t)$$

b) $V_2^p(t) = (\delta + \mu_{23}) V_2(t) - \bar{\delta}$

$$\Rightarrow V_2(t) = C e^{(\delta + \mu_{23})t} + \frac{\bar{\delta}}{\delta + \mu_{23}}$$

$$V_2(n-1) = 0 \Rightarrow$$

$$V_2(t) = \frac{\bar{\delta}}{\delta + \mu_{23}} [1 - e^{-(\delta + \mu_{23})(n-t)}]$$