Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II
Korvaava kurssikoe 17.1.2013

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. (a) (4 pist.) Palauta seuraava 2.kl. differentiaaliyhtälö 1.kl. systeemiksi:

$$\ddot{x}(t) + 3t\,\dot{x}(t) + x(t)^2 = \sin t.$$

(b) (2 pist.) Kirjoita saadulle systeemille alkuehto, joka vastaa alkuperäisen yhtälön alkuehtoa $x(1) = -1$, $\dot{x}(1) = 0$.

2. Etsi seuraavalle homogeenisysteemille perusjärjestelmä $\mathbf{R}$:ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

3. Anna seuraavan systeemin yleinen ratkaisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet, niiden laatu (stabiili vai epästabiili) ja laske lisäksi ratkaisujen radat xy-faasiavaruudessa:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)^2 - 1 \\ \dot{y}(t) &= x(t)y(t). \end{aligned}$$

Huom. Ratoja ei tarvitse eikä kannatakaan piirtää.

Differentiaaliyhtälöt II, kurssikoe 17.1.2013, ratkaisut.

1. (a) Tehdään standardisijoitus $x(t)=x(t)$ ja $y(t)=\dot{x}(t)$, jolloin $\dot{y}(t)=\ddot{x}(t) = -3t\,\dot{x}(t)-x(t)^2+\sin t = -3t\,y(t)-x(t)^2+\sin t$. Saadaan yhtäpitävä 1. kl. normaalimuotoinen pari:

$$\dot{x}(t) = y(t)$$
$$\dot{y}(t) = -x(t)^2-3t\,y(t)+\sin t\ .$$

(b) $x(1)=-1$, $\dot{x}(1)=0$, joten $x(1)=-1,\ y(1)=0$.

2. Vakiokertoiminen: $A=\begin{bmatrix}-1&-5\\1&3\end{bmatrix}$; käytetään matriisikeinoa.

Matriisin A ominaisarvot: $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&-5\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=$ $\lambda^2-2\lambda+2=0 \iff \lambda=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i\in\mathbb{C}$, tosiaankin merkitään $\alpha=1$ ja $\beta=1$.

Vastaavat ominaisvektorit: $\lambda=(1+i)$, jolloin

$$(A-\lambda I)\underline{a}=\begin{bmatrix}-2-i&-5\\1&2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\underline{0}\iff\begin{cases}(-2-i)u_1-5u_2=0\\u_1+(2-i)u_2=0\end{cases}\iff$$

$$u_1=(i-2)u_2\iff\begin{matrix}u_1=(i-2)s\\u_2=s\end{matrix}\iff\underline{a}=s\begin{bmatrix}i-2\\1\end{bmatrix}=s\left(\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right),\ s\in\mathbb{C}$$

Siis $\underline{a}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ ja $\underline{b}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Teorian nojalla saadaan $\mathbb{R}$-funktiopari

$$(\underline{X}_1(t),\underline{X}_2(t))=\left(e^t\left(\cos t\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}-\sin t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right),\ e^t\left(\sin t\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+\cos t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\right).$$

3. Lineaarinen, vakiokertoiminen EHS: $A=\begin{bmatrix}-3&0\\-1&1\end{bmatrix}$.

Ratkaistaan ensin vastaava HS $\dot{\underline{x}}(t)=A\underline{x}(t)$.

Matriisikeino, matriisin A ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-3-\lambda&0\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda-3=0\iff\lambda_1=1\text{ ja }\lambda_2=-3.$$

2
0 4 5
lom. 62. 17.1.13

Vastaavat ominaisvektorit:

$\lambda = 1$, jolloin $(A-\lambda I)\underline{u} = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} = \underline{0}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix}-4u_1 = 0\\ -u_1 = 0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}u_1 = 0\\ u_2 = s\end{matrix} \Leftrightarrow \underline{u} = s\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = s\,\underline{u}_1,\ s\in\mathbb{R}.$

$\lambda = -3$, jolloin $(A-\lambda I)\underline{u} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow -u_1+4u_2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{matrix}u_1 = 4s\\ u_2 = s\end{matrix} \Leftrightarrow \underline{u} = s\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix} = s\,\underline{u}_2,\ s\in\mathbb{R}.$

Luennon teorian mukaan HS:n PJ. on

funktiopari $(\underline{x}_1(t), \underline{x}_2(t)) = \left(e^{t}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, e^{-3t}\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}\right).$

EHS:n yksittäisratkaisua suoraan yritteellä

$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (sillä "epähomogeenisuusosa" on vakio),

jolloin $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{0}$, $A\underline{x}(t) = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3a\\ -a+b\end{bmatrix}$

ja $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{0} = \begin{bmatrix}-3a\\ -a+b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-3a+3 = 0\\ -a+b-1 = 0\end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix}a = 1\\ b = 2\end{matrix}$, siis $\underline{x}_p(t) = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.$

Huom. EHS. on myös autonominen, ja sen kriittinen piste on juuri (1,2) — ja kriittiset pisteet ovat yksittäisratkaisuja, tasapainoratkaisuja.

EHS:n yleinen ratkaisu on luennon teorian mukaan

$\underline{x}(t) = \underline{x}_p(t) + c_1\underline{x}_1(t) + c_2\underline{x}_2(t) = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} + c_1 e^{t}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

4. Epälineaarinen (ei kannata yrittää ratkaista suoraan).

Kriittiset pisteet: $\begin{matrix}x^2-1 = 0\\ xy = 0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x = \pm 1\\ y = 0\end{matrix}$, siis $(1,0)$ ja $(-1,0)$

3 DY 5 lask.har. 17.1.13

$f(x,y)=x^2-1$, $g(x,y)=xy \in C^1(\mathbb{R}^2)$, linearisoidaan kyseinen systeemi.

$$A(x,y)=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ y & x\end{bmatrix};$$

ensimmäisessä kriittisessä pisteessä:

$A=A(1,0)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)(1-\lambda)=0$

$\Leftrightarrow \lambda_1=2$ ja $\lambda_2=1$. Voidaan soveltaa Poincarén lausetta. Sen mukaan kr. piste $(1,0)$ on epästabiili.

$A=A(-1,0)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I)=(2+\lambda)(1+\lambda)=0$

$\Leftrightarrow \lambda_1=-2$ ja $\lambda_2=-1$, negatiiviset. Poincarén lauseen nojalla kriittinen piste $(-1,0)$ on asymptoottisesti stabiili.

Radat, niiden DY on

$\frac{dy}{dx}=y'(x)=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\frac{xy}{x^2-1}$, triv. ratk. $y=0$,

separoimalla $\frac{dy}{y}=\frac{x\,dx}{x^2-1} \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2-1} \Leftrightarrow$

$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C_1 \Leftrightarrow 2\ln|y|=\ln|x^2-1|+C_2 \Leftrightarrow$

$\ln y^2=\ln(C_3|x^2-1|) \Leftrightarrow y^2=C_3|x^2-1| \Leftrightarrow y^2=C(x^2-1)$,

$C\in\mathbb{R}$ ($C=0$ antaa triviaaliratkaisun)

Huom. Lisäksi DY:stä $\frac{dx}{dy}=x'(y)=\frac{x^2-1}{xy}$ saadaan triviaaliratkaisut $x(y)\equiv\pm1$.