

Differentiaaliyhtälöt II

Harjoitus 3, syksy 2012

1. Palauta differentiaaliyhtälö $y'' - \frac{x}{3}y^{(3)} + xyy' - 2x^3 = 0$ normaalimuotoiseksi 1.kl. systeemiksi. Onko tämä lineaarinen?

2. Osoita että funktiopari $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = ([1 \ e^t]^T, [e^{-t} \ 2]^T)$ on lineaarisen 2×2 -homogeenisysteemin

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

perusjärjestelmä \mathbf{R} :ssä.

3. Etsi seuraavalle 2×2 -homogeenisysteemille perusjärjestelmä \mathbf{R} :ssä ja anna myös yleinen ratkaisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2t & 3t^2 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ohje. Toinen yhtälöistä sattuu olemaan yksinkertainen.

Seuraavissa tehtävissä (ja jatkossa) käytetään merkintää $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$.

4. Etsi seuraavan 2×2 -homogeenisysteemin yleinen ratkaisu \mathbf{R} :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Lyhyesti, onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ stabiili vai epästabiili tasapainotila?

5. Etsi seuraavalle 2×2 -homogeenisysteemille perusjärjestelmä \mathbf{R} :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Lyhyesti, onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ stabiili vai epästabiili tasapainotila?

6. Etsi seuraavalle 3×3 -homogeenisysteemille perusjärjestelmä \mathbf{R} :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Lyhyesti, onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ stabiili vai epästabiili tasapainotila?