Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 2, syksy 2012

1. Ratkaise eliminointikeinolla seuraava lineaarinen 1.kl. homogeenisysteemi

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2).$$

Ohje. Kirjoita pari ensin perinteellisessä muodossa funktioiden y_1 ja y_2 avulla.

2. Palauta seuraavat skalaariyhtälöt 1.kl. systeemeiksi
(a) $y'' + \sin x\, y' + y = \cos x\,$,
(b) $y^{(4)} + x^4 y = \sin x\,$.

3. (a) Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi 1.kl. systeemiksi

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, x, y) \\ \ddot{x} &= g(t, x, y, \dot{x}). \end{aligned}$$

(b) Entä jos toinen yhtälö kuuluukin

$$\ddot{x} = g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})?$$

4. Olkoon funktio y AAT:n

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = 0,$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 avulla, että funktio y on määritelty koko $\mathbf{R}$:ssä.

Ohje. Väliarvolause.

5. Sama kuin edellinen tehävä, mutta nyt Poistumislauseen 4.7 avulla.

Ohje. Triviaaliratkaisut.

6. Harjoituksen 1 tehtävän 2 yleisessä ratkaisussa on neljä parametria. Osoita sitovasti että tuo ratkaisu antaa kyseisen differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut.

Ohje. Lause 5.4, tai jos haluat palauttaa systeemiksi, lause 5.3 (tai 5.5).