Diff.yht. II, kurssikoe 11.12.2012, ratkaisut ja arvostelukommentit (Jouni Luukkainen), 4 sivua
Arvostelu valmistui ti 18.12.2012

Teht. 1. *Määritä seuraavalle homogeenisysteemille perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ratk. Etsitään matriisin $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-\lambda) - (-2)1 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$
$$\iff \lambda \in \{-1, -2\}.$$

Nämä ovat reaaliset ja erisuuret. Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - (-1)I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \iff u_2 = 2u_1 \iff \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$$
$$(A - (-2)I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \iff u_2 = u_1 \iff \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R} \setminus 0).$$

Täten homogeenisysteemillä $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ on $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = (e^{-t}(1,2), e^{-2t}(1,1))$.

Toinen tapa. Eliminointi. Tätä yritti vain neljä (kolme osasi). Siksi en esitä tällaista ratkaisua.

Arvostelusta. Ominaisarvot: 1 p; ominaisvektorit: 2 p; ratkaisut $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$: 2 p; perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$: 1 p. Tyypilliset virheet: Ominaisvektorin $(1,2)$ sijasta $(2,1)$: -1 p. Perusjärjestelmän sijasta yleinen ratkaisu $\mathbf{x} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2$ (tai perusmatriisi $[\,\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2\,]$): -1 p.

Teht. 2. (a) (4 pist.) *Laske kolme ensimmäistä Picardin approksimaattia y_0, y_1 ja y_2 alkuarvotehtävälle*

$$y'(x) = \cos x \sin y, \qquad y(-1) = \pi.$$

(b) (2 pist.) *Anna approksimaatti y_{1000}.*

Ratk. (a) Differentiaaliyhtälö on jatkuvan funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \cos x \sin y$, määrittelemä. Alkuehdon mukaan on

$$y_0(x) = \pi \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Edelleen kullakin $n \geq 0$ on

$$y_{n+1}(x) = \pi + \int_{-1}^{x} f(t, y_n(t))\, dt = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \sin y_n(t)\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Täten

$$y_1(x) = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \sin y_0(t)\, dt = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \sin \pi\, dt = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \cdot 0\, dt = \pi + 0 = \pi \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$y_2(x) = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \sin y_1(t)\, dt = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \sin \pi\, dt = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \cdot 0\, dt = \pi + 0 = \pi \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Osoitetaan induktiolla, että $y_n(x) = \pi\ \forall x \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \geq 0$. No, jos $n = 0$, niin väite pätee, ja jos taas $n \geq 0$ on sellainen, että $y_n(x) = \pi\ \forall x \in \mathbb{R}$, niin $y_{n+1}(x) = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \sin y_n(t)\, dt = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \sin \pi\, dt = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \cdot 0\, dt = \pi + 0 = \pi\ \forall x \in \mathbb{R}$. Täten $y_{1000}(x) = \pi\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Toinen tapa ratkaista (a)- ja (b)-kohdat on huomata, että tutkittava yhtälö on separoituva ja toteuttaa lokaalin yksikäsitteisyyslauseen oletukset tasossa $\mathbb{R}^2$ ja että alkuarvo-ongelman yksikäsitteinen maksimaalinen ratkaisu on triviaaliratkaisu $y(x) = \pi \ \forall x \in \mathbb{R}$. Tällöin nimittäin heti $y_0 = y$, ja koska lisäksi $y(x) = \pi + \int_{-1}^{x} \cos t \sin y(t)\, dt \ \forall x \in \mathbb{R}$, niin $y_n = y$ kaikilla $n \geq 1$.

Arvostelusta. Aniharva oli huomannut, että alkuarvotehtävän ratkaisu on vakiofunktio $x \mapsto \pi$. Induktiotodistusta ei (b)-kohdassa vaadittu eikä siitä hyvitetty. Monilla oli induktionpoikasia eli induktioaskel $999 \mapsto 1000$. Moni oli muodostanut approksimaatin $y_{-1}(x) = \pi$, jotta olisi voinut sitten laskemalla laskea approksimaatin y_0; tästä ei mennyt sakkoa.

Teht. 3. *Anna seuraavan systeemin yleinen ratkaisu:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -3e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ratk. Systeemi on lineaarinen ja vakiokertoiminen. Etsitään kerroinmatriisin $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ominaisarvot $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i.$$

Etsitään ominaisarvoa $\lambda = i$ vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - iI)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -i & 1/2 \\ -2 & -i \end{bmatrix} \iff -iu_1 + (1/2)u_2 = 0 \iff u_2 = 2iu_1 \iff \mathbf{u} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Valitsemalla $s = 1$ saadaan homogeeniselle systeemille $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ kompleksinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = e^{it}\mathbf{u} = (\cos t + i \sin t)(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix})$$

ja siis reaalinen perusjärjestelmä

$$\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} \cos t \\ -2\sin t \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos t = \begin{bmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix}.$$

Epähomogeenisuustermi on $\mathbf{f}(t) = e^{-t}(-3, 2)$. Tehdään **yrite** $\mathbf{x}(t) = e^{-t}\mathbf{u}$ määritettävin kertoimin $\mathbf{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ epähomogeenisen systeemin yksittäisratkaisun löytämiseksi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff -e^{-t}\mathbf{u} = e^{-t}A\mathbf{u} + e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff (A + I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} a + (1/2)b = 3 \\ -2a + b = -2 \end{cases} \iff a = b = 2.$$

Täten systeemin yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -2\sin t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Vakion varioinnilla. Yksittäisratkaisu löydetään myös vakion varioinnilla. Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu voidaan perusjärjestelmästä saatavan perusmatriisin $X = [\,\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2\,]$ avulla kirjoittaa muotoon $\mathbf{x} = X\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$). Nyt voidaan määrittää sellainen derivoituva funktio $\mathbf{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, että $\mathbf{x} = X\mathbf{c}$ toteuttaa epähomogeenisen yhtälön. Ehdoksi tulee $\dot{\mathbf{c}} = X^{-1}\mathbf{f}$. Nyt $X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -2\sin t & 2\cos t \end{bmatrix}$ ja $\det X(t) =$

$2(\cos^2 t+\sin^2 t)=2$, joten $X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2\cos t & -\sin t\\ 2\sin t & \cos t\end{bmatrix}e^{-t}\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}=e^{-t}\begin{bmatrix}-3\cos t-\sin t\\ -3\sin t+\cos t\end{bmatrix}$. Integroinnissa tarvitaan kaavoja $\int e^{-t}\cos t\,dt=-\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t-\sin t)$ ja $\int e^{-t}\sin t\,dt=-\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t+\sin t)$, jotka saadaan ratkaisemalla kahden peräkkäisen osittaisintegroinnin tuottamat yhtälöt

$$\begin{aligned}\int e^{-t}\cos t\,dt&=-e^{-t}\cos t-\int(-e^{-t})(-\sin t)\,dt=-e^{-t}\cos t-\left(e^{-t}(-\sin t)-\int e^{-t}(-\cos t)\,dt\right)\\&=-e^{-t}(\cos t-\sin t)-\int e^{-t}\cos t\,dt\qquad\text{ja}\\ \int e^{-t}\sin t\,dt&=-e^{-t}\sin t-\int(-e^{-t})\cos t\,dt=-e^{-t}\sin t-\left(e^{-t}\cos t-\int e^{-t}(-\sin t)\,dt\right)\\&=-e^{-t}(\sin t+\cos t)-\int e^{-t}\sin t\,dt.\end{aligned}$$

Näin saadaan $\mathbf{c}(t)=\int X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt=e^{-t}\begin{bmatrix}2\cos t-\sin t\\ \cos t+2\sin t\end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}(t)=X(t)\mathbf{c}(t)=e^{-t}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$.

Toinen tapa: Eliminointi. Tämä tiiviisti:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t)\iff\begin{cases}\dot x_1(t)=(1/2)x_2(t)-3e^{-t}\\ \dot x_2(t)=-2x_1(t)+2e^{-t}\end{cases}\iff\begin{cases}\ddot x_1(t)+x_1(t)=4e^{-t}\\ x_2(t)=2\dot x_1(t)+6e^{-t}\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x_1(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+2e^{-t}\\ x_2(t)=-2C_1\sin t+2C_2\cos t+2e^{-t}\end{cases}\iff\mathbf{x}(t)=C_1\begin{bmatrix}\cos t\\ -2\sin t\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}\sin t\\ 2\cos t\end{bmatrix}+e^{-t}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix};$$

toisen kertaluvun yhtälöä vastaavan HY:n KY on $r^2+1=0\iff r=\pm i$ ja PJ siis $(\cos,\sin)$, ja EHY:n yksittäisratkaisu saatiin yritteellä $x_1(t)=ae^{-t}$ ($a\in\mathbb{R}$).

Arvostelusta. Matriisimenelmää käytettäessä ominaisarvoista sai 1 p, ominaisvektoreista 1 p ja HY:n perusjärjestelmän funktioista (tai HY:n yleisestä ratkaisusta) 1 p; EHY:n yksittäisratkaisusta sai 2 p ja lopputuloksesta 1 p. Vaadittiin $\mathbb{R}^2$-arvoinen ratkaisu; $\mathbb{C}^2$-arvoinen ei riittänyt. On myönnettävä, että tällainen pistejako ei ollut tasavälinen.

Vakion varioinnissa, jota onneksi tällä kertaa yritti vain yhdeksän mutta joka joskus on välttämätön, vasta oikein laskettu integroitava $X(t)^{-1}\mathbf{f}(t)$ tuotti 1 p. (Vakion varioinnissa integraalifunktion laskemisessa oli myös yritetty ohittaa osittaisintegroinnit väärin kaavoin $\int f'g'=fg'+f'g$ ja $\int f'g'=fg$.)

Eliminointimenetelmää käytti vain yksi, joten sen arvosteluperusteita ei nyt esitellä.

Teht. 4. *Palauta toisen kertaluvun (skalaarinen) differentiaaliyhtälö*

$$\ddot x(t)=-2\dot x(t)+x(t)^2+x(t)-2$$

ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoiseksi systeemiksi ja määritä tämän (autonomisen parin) kriittiset pisteet sekä niiden laatu (stabiili vai epästabiili).

Ratk. Neliön $x(t)^2$ tähden yhtälö ei ole lineaarinen. Jos funktio x on yhtälön ratkaisu jollain välillä, niin funktiot $x_1=x$ ja $x_2=\dot x$ toteuttavat tällä samalla välillä systeemin

$$\begin{cases}\dot x_1(t)=x_2(t)\\ \dot x_2(t)=-2x_2(t)+x_1(t)^2+x_1(t)-2,\end{cases}$$

ja kääntäen tämän systeemin ratkaisusta (x_1,x_2) saadaan skalaariyhtälön ratkaisu $x=x_1$; tämä systeemi on siis vaadittu. Neliön $x_1(t)^2$ tähden systeemi ei ole lineaarinen.

Systeemin määrittelevät jatkuvasti derivoituvat funktiot $f,g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, joilla $f(x_1,x_2)=x_2$ ja $g(x_1,x_2)=-2x_2+x_1^2+x_1-2$. Systeemin kriittiset pisteet:

$$\begin{cases}f(x_1,x_2)=0\\ g(x_1,x_2)=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_2=0\\ -2x_2+x_1^2+x_1-2=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_1^2+x_1-2=(x_1-1)(x_1+2)=0\\ x_2=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\end{cases}\quad\text{tai}\quad\begin{cases}x_1=-2\\ x_2=0\end{cases}$$

eli siis $(x_1, x_2) = \underline{(1,0)}$ ja $(x_1, x_2) = \underline{(-2,0)}$.

Kuvauksen $(f,g)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derivaattakuvauksen matriisi $A = \begin{bmatrix} D_1 f & D_2 f \\ D_1 g & D_2 g \end{bmatrix} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ on

$$A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x_1 + 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Määritetään matriisien

$$A(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A(-2,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot:

$$\det(A(1,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \iff \lambda \in \{1, -3\};$$

$$\det(A(-2,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 3 = (\lambda + 1)^2 + 2 = 0 \iff \lambda = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Matriisin $A(1,0)$ ominaisarvot ovat erimerkkiset, joten kriittinen piste $(1,0)$ on <u>epästabiili</u> (<u>satulapiste</u>), kun taas matriisin $A(-2,0)$ ominaisarvot ovat imaginääriset liittoluvut, joiden reaaliosa (-1) on negatiivinen, joten kriittinen piste $(-2,0)$ on <u>stabiili</u> (jopa <u>asymptoottisesti stabiili</u>). Jo karakteristisen yhtälön vakiotekijöistä (eli ominaisarvojen tulosta) nähdään. että Poincarén lausetta varten tarvittavat ehdot $\det A(1,0) = -3 \neq 0$ ja $\det A(-2,0) = 3 \neq 0$ ovat voimassa.

Huom. Systeemin kriittiset pisteet vastaavat skalaarisen yhtälön vakiofunktioratkaisuja. Kriittisen pisteen $(-2,0)$ asymptoottinen stabiilius merkitsee skalaariselle yhtälölle, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $x\colon \Delta \to \mathbb{R}$ on ratkaisu, jolla $0 \in \Delta$, $|x(0) - (-2)| < \delta$ ja $|\dot{x}(0) - 0| < \delta$, niin $\Delta \supset [0, \infty[$, $|x(t) - (-2)| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$, $|\dot{x}(t) - 0| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = -2$ ja $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0$.

Arvostelusta. Systeemistä, kriittisten pisteiden määrittämisestä ja derivaattamatriisista sai kustakin 1 p.

Systeemin kirjoittamisessa oli tavallinen virhe määritellä kolmas tuntematon funktio $x_3(t) = x(t)^2$, mutta koska tällöin $\dot{x}_3(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = 2x_1(t)x_2(t)$, niin sekään ei tee systeemistä lineaarista ja toisaalta tuottaisi ylimääräisiä ratkaisuja, jotka eivät toteuta oikeaa systeemiä. Jos kuitenkin jätti funktion x_3 derivoimatta, ei tehnyt virhettä.

Kriittisissä pisteissä tavallinen virhe oli kirjoittaa ne muodossa $(0,1)$ ja $(0,-2)$. Molemmat kriittiset pisteet oli löydettävä.

Systeemille pätee kylläkin esitys $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1(t) + 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, mutta esitys ei tee systeemistä lineaarista, sillä esityksen (2×2)-matriisi riippuu tuntemattomasta funktiosta x_1. Tuota matriisia ei siis voinut käyttää systeemin korvaamiseen lineaarisella homogeeniyhtälöllä kriittisissä pisteissä (vaikka erona derivaattamatriisiin näyttäisikin olevan vain kertoimen 2 puuttuminen), jolloin kriittisten pisteiden laadun tutkimisesta ei saanut pistettäkään.

Derivaattamatriisissa joku oli sekoittanut rivit keskenään ja joku toinen taas sarakkeet keskenään; järjestyksellä on kuitenkin väliä.

Kriittisten pisteiden laadusta saattoi siis saada pisteitä vain tutkimalla derivaattamatriisin ominaisarvoja kriittisissä pisteissä. Tällöin virheet ominaisarvojen laskemisessa eivät vieneet pisteitä, kunhan vain ominaisarvojen oleelliset ominaisuudet eli tapaukset 1) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ ja 2) $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$ ja $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$ säilyivät. Pisteitä saattoi saada myös silloin, jos kriittiset pisteet tai derivaattamatriisi olivat virheellisiäkin, mutta vain sikäli kuin ne johtivat tapauksiin 1) tai 2).