Diff.yht. II, harj. 5, 4.–5.12.2012, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 tekstisivua ja 1 kuvasivu

Huom. Osoitetaan, että yleistettyjä ominaisvektoreita käyttäen konstruoidut ratkaisut ovat todellakin ratkaisuja. Olkoon siis $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $(A-\lambda I)^m\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ja

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tällöin $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}$ ja

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}(t) &= \lambda I\mathbf{x}(t) + (A-\lambda I)\mathbf{x}(t) = \lambda\mathbf{x}(t) + e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^{k+1}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{x}(t) + e^{\lambda t}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u} \\ &= \left(\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u} + e^{\lambda t}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ei siis tarvittu päättymätöntä potenssisarjaa $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}(t^k/k!)A^k$ ja tietoa $(d/dt)e^{tA} = Ae^{tA}$.

Teht. 1. *Etsi matriisikeinolla (joka soveltaa yleistettyjä ominaisvektoreita) $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä systeemille*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Ratk. Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{s1}}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) - 2(2-\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Etsitään ominaisarvoja $\lambda = -1$ ja $\lambda = 2$ vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sievennetään ensin kerroinmatriiseja alkeisrivioperaatioin, joiden valinnan voi havaita laskusta:

$$\begin{aligned} A-(-1)I &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ A-2I &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned} (A-(-1)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff u_1 = -(3/2)u_3 \text{ ja } u_2 = 2u_3 \iff \mathbf{u} = s(-3,4,2) \quad (s \in \mathbb{R}); \\ (A-2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff u_1 = 0 \text{ ja } u_2 = -u_3 \iff \mathbf{u} = s(0,1,-1) \quad (s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Saadaan siis ratkaisut $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix}-3 & 4 & 2\end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$ etsittävään perusjärjestelmään. Etsitään ominaisarvoon $\lambda = 2$ liittyvät yleistetyt ominaisvektorit ratkaisemalla yhtälö $(A-2I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Sievennetään ensin kerroinmatriisia alkeisrivioperaatioin:

$$(A-2I^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Täten

$$(A-2I)^2\mathbf{u}=\mathbf{0} \Longleftrightarrow u_1=u_2+u_3 \Longleftrightarrow \mathbf{u}=\begin{bmatrix} s_1+s_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}=s_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+s_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad (s_1,s_2\in\mathbb{R}).$$

(Ominaisvektori $\mathbf{u}=(0,1,-1)$ vastaa tapausta $(s_1,s_2)=(1,-1)$.) Valitaan esimerkiksi $\mathbf{u}=(1,1,0)\nparallel(0,1,-1)$. Tällöin saadaan etsittävään perusjärjestelmään kolmas ratkaisu

$$\mathbf{x}_3(t)=e^{2t}(\mathbf{u}+t(A-2I)\mathbf{u})=e^{2t}(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix})=e^{2t}(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix})=e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1+t\\-t\end{bmatrix}.$$

Teht. 2. *Tarkastellaan uudestaan edellistä systeemiä. Luonnostele lyhyesti, millä muulla tavalla sille voi löytää perusjärjestelmän. Yksityiskohtia ei tarvitse esittää.*

Ratk. Eliminoimalla. Merkitään $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Tällöin systeemille

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t) \Longleftrightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=x_1+x_2+x_3\\ \dot{x}_2=2x_1+x_2-x_3\\ \dot{x}_3=-x_2+x_3\end{cases}$$

voidaan johtaa esimerkiksi seuraavat sen kanssa ekvivalentit, ylhäältä alas ratkaistavat systeemit:

$$\begin{cases}\ddot{x}_1-\dot{x}_1-2x_1=0\\ \dot{x}_2-2x_2=3x_1-\dot{x}_1\\ x_3=\dot{x}_1-x_1-x_2\end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases}\dddot{x}_3-3\ddot{x}_3+4x_3=0\\ x_2=x_3-\dot{x}_3\\ x_1=(1/2)(\dot{x}_2-x_2+x_3).\end{cases}$$

Yhtälön $\ddot{x}_1-\dot{x}_1-2x_1=0$ karakteristinen polynomi on $r^2-r-2=(r+1)(r-2)$. Yhtälön $\dddot{x}_3-3\ddot{x}_3+4x_3=0$ karakteristinen polynomi on $r^3-3r^2+4=(r+1)(r-2)^2$ ja yleinen ratkaisu $x_3(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+c_3te^{2t}$. Kummankin systeemin yleisestä ratkaisusta voidaan muodostaa systeemille perusjärjestelmä.

Teht. 3. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili):*

$$\dot{x}=2y-2$$
$$\dot{y}=-x+2y.$$

Ratk. Kyseessä on lineaarinen systeemi tasossa $\mathbb{R}^2$. Systeemillä on tasan yksi kriittinen piste:

$$\begin{cases}2y-2=0\\ -x+2y=0\end{cases} \Longleftrightarrow (x,y)=\underline{(2,1)}.$$

Määritetään kriittisen pisteen $(2,1)$ laatu vastaavan homogeenisen systeemin $\dot{\mathbf{z}}(t)=A\mathbf{z}(t)$, $A=\begin{bmatrix}0&2\\-1&2\end{bmatrix}$, kriittisen pisteen $(0,0)$ laatuna A:n ominaisarvoja käyttäen:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&2\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda-1)^2+1=0 \Longleftrightarrow \lambda=1\pm i.$$

Koska $\mathrm{Re}(1\pm i)=1>0$, on kriittinen piste <u>epästabiili</u>.

Teht. 4. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:*

$$\dot{x}=-2x+y+6$$
$$\dot{y}=x-2y+3.$$

Ratk. Kyseessä on epähomogeeninen lineaarinen systeemi tasossa $\mathbb{R}^2$. Määritetään systeemin kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} -2x + y + 6 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 4. \end{cases}$$

Kriittisiä pisteitä on siis tasan yksi, $\underline{(5,4)}$. Systeemin matriisin $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (symmetrinen!) ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+2)^2 - 1 = 0 \iff \lambda = -2 \pm 1 \iff \lambda \in \{-1, -3\}.$$

Ominaisarvot ovat erisuuret ja negatiiviset. Siksi kriittinen piste on asymptoottisesti stabiili.

Teht. 5. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = 2 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Ratk. Kuvaukset $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y$ ja $g(x,y) = 2 - x^2 - y^2$, ovat jatkuvasti derivoituvia. Kriittiset pisteet:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2) = 0 \end{cases} \\ &\iff x^2 = y = 1 \quad \text{tai} \quad x^2 = y = -2 \iff \underline{(x,y) = (-1,1) \text{ tai } (x,y) = (1,1).} \end{aligned}$$

Kuvauksen (f,g) derivaatan matriisi pisteessä (x,y) on $A(x,y) = \begin{bmatrix} D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \\ D_1 g(x,y) & D_2 g(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -2x & -2y \end{bmatrix}$.

Matriisien $A(-1,1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ja $A(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot:

$$\begin{aligned} \det(A(-1,1) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = -2 \pm i\sqrt{2}; \\ \det(A(1,1) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Kriittinen piste $\underline{(-1,1)}$ on asymptoottisesti stabiili, sillä $\mathrm{Re}(-2 \pm i\sqrt{2}) = -2 < 0$; koska lisäksi $\mathrm{Im}(-2 \pm i\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2} \neq 0$, niin radat lähestyvät pistettä $(-1,1)$ spiraalimaisesti.
Kriittinen piste $\underline{(1,1)}$ on epästabiili, sillä ominaisarvot $\pm\sqrt{6}$ ovat erimerkkiset: satulapiste.

Teht. 6. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet:*

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(y-2) \\ \dot{y} = x^2 - x - 2. \end{cases}$$

Mitä Poincarén lause kertoo kriittisten pisteiden laadusta? Määritä myös systeemin radat.

Ratk. Luonnostellaan lisäksi virtauskuvio piirtämällä ratoja virtaussuuntineen, koska tarvitsemme tätä eräiden kriittisten pisteiden laadun selvittämiseksi.

Olkoon $f(x,y) = (x+1)(y-2)$ ja $g(x,y) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, kun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \text{ tai } y = 2 \\ x = -1 \text{ tai } x = 2 \end{cases} \iff (x,y) = \underline{(-1,s)} \text{ jollain } s \in \mathbb{R} \text{ tai } (x,y) = \underline{(2,2)}.$$

Suoran $x = -1$ jokainen piste on kriittinen piste; kyseessä on *kriittinen suora*.

Jokaiseen kriittiseen pisteeseen liittyy pistemäinen rata.

Määritetään radat kriittisten pisteiden joukon komplementissa $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -1,\ (x, y) \neq (2, 2)\}$. Radat joukon $f(x, y) = 0$ eli suorien $x = -1$ ja $y = 2$ ulkopuolella saadaan separoituvasta differentiaaliyhtälöstä:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(y-2)} = \frac{x-2}{y-2} \iff \int (y-2)\,dy = \int (x-2)\,dx$$

$$\iff \tfrac{1}{2}(y-2)^2 = \tfrac{1}{2}(x-2)^2 + C_0\ (C_0 \in \mathbb{R}) \overset{C=-2C_0}{\iff} \underline{(x-2)^2 - (y-2)^2 = C}\ (C \in \mathbb{R}).$$

Joukon $g(x, y) = 0$ eli suorien $x = -1$ ja $x = 2$ ulkopuolella saadaan radoille separoituva differentiaaliyhtälö $dx/dy = f(x, y)/g(x, y) = (y - 2)/(x - 2)$, jolloin tulee sama yhtälö $\int(y - 2)\,dy = \int(x - 2)\,dx$ ja sama lopullinen käyrä kuin yllä. Näin saatiin radoista selvitettyä myös ehdon $f(x, y) \neq 0$ poistamat pisteet.

Jos $C \neq 0$, tämä käyrä on C:n merkin mukaan jompikumpi hyperbeleistä

$$\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{|C|})^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{|C|})^2} = \pm 1;$$

jos taas $C = 0$, tämä käyrä on näiden hyperbeliparvien yhteiset aymptoottisuorat

$$(y-2) = \pm(x-2).$$

Nämä radat ovat kriittisten pisteiden näiden hyperbelien haaroista ja niiden asymptooteista erottamilla yhtenäisillä avoimilla kaarilla. Itse asiassa nämä avoimet kaaret ovat kokonaisia ratoja, mikä nähdään seuraavasti. Olkoon $(x(\cdot), y(\cdot))\colon \Delta \to \mathbb{R}^2$ maksimaalinen ratkaisu ja $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ välin Δ päätepiste. Funktioista $x(\cdot)$ ja $y(\cdot)$ ainakin toinen on monotoninen, kuten jäljempänä oleva f:n ja g:n merkkien tutkiminen osoittaa, joten ainakin toinen raja-arvoista

$$x_\alpha = \lim_{t\to\alpha} x(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \qquad \text{ja} \qquad y_\alpha = \lim_{t\to\alpha} y(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

on olemassa, jolloin radan yhtälöstä seuraa, että toinenkin on olemassa ja pätee $x_\alpha \in \mathbb{R} \iff y_\alpha \in \mathbb{R}$. Tapauksessa $(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{R}^2$ seuraa 1. kl. systeemien poistumislauseesta, että $\alpha = -\infty$ tai $\alpha = \infty$; tästä puolestaan seuraa Lauseen 6.4 nojalla, että (x_α, y_α) on kriittinen piste. *Täten jokainen äsken mainittu avoin kaari on kokonainen rata.*

Suoralla $y = 2$ on $f(x, y) = 0$ (eli virtauksella on alustavasti suunta $|$) ja $g(x, y) = (x + 1)(x - 2) > 0$ (eli virtauksella on suunta $\uparrow$), jos $x < -1$ tai $x > 2$, ja $g(x, y) < 0$ (eli virtauksella on suunta $\downarrow$), jos $-1 < x < 2$. Suoralla $x = 2$ on $g(x, y) = 0$ (eli virtauksella alustavasti suunta $-$) ja $f(x, y) = 3(y - 2) > 0$ (eli virtauksella suunta $\rightarrow$), jos $y > 2$, ja $f(x, y) < 0$ (eli virtauksella suunta $\leftarrow$), jos $y < 2$. Alueissa $G_1 = \{(x, y) \in G \mid x < -1\}$ ja $G_2 = \{(x, y) \in G \mid x > -1\}$ eivät f ja g voi jatkuvina funktioina vaihtaa merkkiään muualla kuin suorilla $y = 2$ ja $x = 2$, mikä polynomeista f ja g nähdään suoraankin. Saaduista viidestä nuolesta (**Kuvio 1**) voidaan siis ratojen kulkusuunta määrittää (**Kuvio 2**).

Vaihtoehtoisesti ennen ratojen kulkusuunnan määrittämistä voidaan ensin selvittää f:n ja g:n merkkiyhdistelmät $++$, $+-$, $--$ tai $-+$ suorien $x = -1$, $x = 2$ ja $y = 2$ rajaamissa alueissa ja piirtää näiden nojalla virtauksen suunta näissä alueissa muodossa $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$ tai $\nwarrow$ (**Kuvio 3**). Suorilla $y = 2$ ja $x = 2$ virtauksen suunta määräytyy näistä f:n ja g:n jatkuvuuden perusteella muodossa $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$ tai $\leftarrow$.

Kuvauksen (f, g) derivaatalla pisteessä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on matriisi $A(x, y) = \begin{bmatrix} y-2 & x+1 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$.

Nyt $A(2, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, joten $\det(A(2, 2) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \iff \lambda = \pm 3$; siis matriisin $A(2, 2)$ ominaisarvot ovat erimerkkiset, jolloin Poincarén lauseen nojalla kriittinen piste $(2, 2)$ on <u>epästabiili</u>. Tämä nähdään myös Kuviosta 2.

Toisaalta, kun $s \in \mathbb{R}$, niin $A(-1, s) = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ on alakolmiomatriisi, joten sen ominaisarvot ovat lävistäjän alkiot $\lambda_1 = s-2$ ja $\lambda_2 = 0$; tällöin on myös $\det A(-1, s) = 0$. Siis <u>Poincarén lause ei tähän tapaukseen sovellu</u>. Mutta Kuviosta 2 nähdään, että kriittinen piste $(x, y) = (-1, s)$ on <u>epästabiili</u>, jos $s \geq 2$, ja <u>stabiili, mutta ei asymptoottisesti stabiili</u>, jos $s < 2$.