Diff.yht. II, harj. 4, 27.–28.11.2012, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 sivua

Lukuteoriaa. Jos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, niin yhtälön $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ rationaaliset juuret ovat kokonaislukuja ja kertoimen c tekijöitä. Jos nimittäin $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{N}$ ovat lukuja, joilla ei ole yhteisiä alkutekijöitä, ja $\lambda = p/q$ on juuri, jolloin $p^3 + ap^2q + bpq^2 + cq^3 = 0$, niin q on luvun $p^3 = -q(ap^2 + bpq + cq^2)$ ja p luvun $cq^3 = -p(p^2 + apq + bq^2)$ tekijä, joten $q = 1$ ja $p|c$.

Teht. 1. *Muodosta* $\mathbb{R}$*:ssä perusjärjestelmä homogeenisysteemille* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$*, kun*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -8 & 14 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Määritä lisäksi systeemin tasapainoratkaisun $\mathbf{0}$ *laatu (stabiili vai epästabiili).*

Ratk. Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -8 & 14 & -7-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{r1}}{=} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 14 & -7-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -8 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 7\lambda + 14) - 8$$
$$= -(\lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+4) = 0 \iff \lambda \in \{-1, -2, -4\}.$$

Siis kolme erisuurta reaalista ominaisarvoa, ja ne kaikki ovat negatiivisia. Täten $\mathbf{0}$ on <u>stabiili</u>.
Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\lambda = -1: \quad (A - (-1)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -8 & 14 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ u_2 - u_3 = 0 \\ -8u_1 + 14u_2 - 6u_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff u_1 = u_2 = u_3 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

$$\lambda = -2: \quad (A - (-2)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -8 & 14 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2u_1 - u_2 = 0 \\ 2u_2 - u_3 = 0 \\ -8u_1 + 14u_2 - 5u_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 4u_1 \end{cases} \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

$$\lambda = -4: \quad (A - (-4)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -8 & 14 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 4u_1 - u_2 = 0 \\ 4u_2 - u_3 = 0 \\ -8u_1 + 14u_2 - 3u_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_2 = 4u_1 \\ u_3 = 16u_1 \end{cases} \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Siis ratkaisut $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_3(t) = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$ muodostavat systeemin perusjärjestelmän $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$.

Teht. 2. *Muodosta $\mathbb{R}$:ssä perusmatriisi homogeenisysteemille $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, kun*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Ratk. Etsitään A:n ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda-2)^2 + 1 = 0 \iff \lambda = 2 \pm i$.

Etsitään kompleksista ominaisarvoa $\lambda = 2 + i \in \mathbb{C}$ vastaavat kompleksiset ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - (2+i)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \text{(lisäämällä toinen rivi } i\text{:llä kerrottuna ensimmäiseen riviin)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_1 = iu_2 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Valinnalla $a = 1$ saadaan systeemille kompleksinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u} = e^{2t}e^{it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}(\cos t + i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

josta saadaan reaalisista ratkaisuista

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \operatorname{Re} \mathbf{x}(t) = e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \quad \text{ja} \\ \mathbf{x}_2(t) &= \operatorname{Im} \mathbf{x}(t) = e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

koostuva perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Tällöin $X(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t)\,] = e^{2t} \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ on systeemin perusmatriisi.

Teht. 3. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

käyttäen varioimiskeinoa. Mikä suora yrite johtaisi tulokseen helpommin?

Ratk. Ratkaistaan ensin homogeenisysteemi $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Etsitään A:n ominaisarvot: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$ (ominaisarvot puhtaan imaginääriset, koska A on antisymmetrinen: $A^T = -A$).

Etsitään kompleksista ominaisarvoa $\lambda = i \in \mathbb{C}$ vastaavat kompleksiset ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (sama yhtälö kuin tehtävässä 2):

$$(A - iI)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} -iu_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - iu_2 = 0 \end{cases} \iff u_1 = iu_2 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Valinnalla $a = 1$ saadaan systeemille kompleksinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = e^{it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = (\cos t + i \sin t) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

josta saadaan reaalisista ratkaisuista

$$\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

koostuva perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Tällöin $X(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t)\,] = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ on systeemin perusmatriisi, joka kullakin t on ortogonaalinen, koska sen sarakkeet ovat keskenään kohtisuorassa olevia yksikkövektoreita, ja symmetrinen; tällöin $X(t)^{-1} = X(t)^T = X(t)$.

Täten homogeeniyhtälön $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}$ ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$).

Täyden yhtälön yksittäisen ratkaisun löytämiseksi käytetään varioimiskeinoa ja kirjoitetaan $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$, jolloin $\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{X}(t)\mathbf{c}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = AX(t)\mathbf{c} + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{x}(t) + X(t)\dot{\mathbf{c}}(t)$ ja siis

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) &\iff X(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{f}(t) \\ &\iff \dot{\mathbf{c}}(t) = X(t)^{-1}\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin t + 3\cos t \\ -2\cos t + 3\sin t \end{bmatrix} \\ &\impliedby \mathbf{c}(t) = \int \begin{bmatrix} 2\sin t + 3\cos t \\ -2\cos t + 3\sin t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -2\cos t + 3\sin t \\ -2\sin t - 3\cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Näin saadaan yksittäisratkaisu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c}(t) &= \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\cos t + 3\sin t \\ -2\sin t - 3\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin t\cos t - 3\sin^2 t - 2\cos t\sin t - 3\cos^2 t \\ -2\cos^2 t + 3\cos t\sin t - 2\sin^2 t - 3\sin t\cos t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3(\sin^2 t + \cos^2 t) \\ -2(\cos^2 t + \sin^2 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nopeammin olisi toiminut yrite, joka on samaa muotoa kuin yhtälön oikea puoli, eli siis vakiofunktioyrite $\mathbf{x}(t) = [\,a \quad b\,]^T$ ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff \mathbf{0} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \iff \mathbf{x}(t) = A^{-1}(-\mathbf{f}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Yleiseksi ratkaisuksi saadaan $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{c_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

Teht. 4. *Ratkaise lineaarinen systeemi*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \tag{1}$$

käyttäen sopivaa suoraa yritettä. Se johtaa 4×4*-kokoiseen lineaariseen yhtälöryhmään.*

Ratk. Ratkaistaan ensin täydelleen homogeeninen systeemi $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Karakteristisen yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda = 3$ ja $\lambda = -1$. Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\begin{aligned} (A - 3I)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = 2u_1 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus 0); \\ (A + I)\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_2 = -2u_1 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus 0). \end{aligned}$$

Täten homogeenisen systeemin yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Huomataan, että $\mathbf{f}(t) = -\mathbf{e}_1 \cos t - \mathbf{e}_2 \sin t$ ei sisälly homogeenisen systeemin ratkaisuihin. Tehdään siksi (1):n yksittäisratkaisun löytämiseksi yrite $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t \ \forall t \in \mathbb{R}$ määritettävin kertoimin $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Yritteelle on

$$(1) \iff -\mathbf{a}\sin t + \mathbf{b}\cos t = A\mathbf{a}\cos t + A\mathbf{b}\sin t - \mathbf{e}_1\cos t - \mathbf{e}_2 \sin t \iff -\mathbf{a} = A\mathbf{b} - \mathbf{e}_2 \quad \& \quad \mathbf{b} = A\mathbf{a} - \mathbf{e}_1.$$

Sijoittamalla jälkimmäinen yhtälö edelliseen saadaan

$$-\mathbf{a} = A^2\mathbf{a} - A\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \iff (A^2 + I)\mathbf{a} = A\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

jossa $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ ja siis $(A^2+I)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, jolloin

$$\mathbf{a} = (A^2+I)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathbf{b} = A\mathbf{a} - \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix} - \mathbf{e}_1 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Siis (1):n yleinen ratkaisu on $\mathbf{x}(t) = \underline{C_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}\cos t + \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\sin t} \ \forall t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Teht. 5. *Etsi seuraavalle homogeenisysteemille $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä matriisikeinolla, joka soveltaa yleistettyjä ominaisvektoreita:*

$$(1) \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t).$$

Ohje. *Luentomonisteen yhtälöt* (5.31) *ja* (5.32).

Ratk. Matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ karakteristisella yhtälöllä $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0$ on kaksoisjuuri $\lambda = -2$. Määritetään ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A+2I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \iff u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Täten A:n ominaisvektoreista ei voida valita kantaa $\mathbb{R}^2$:lle. Siis perusjärjestelmää ei saada suoraan matriisikeinolla. Valinnalla $a = 1$ eli $\mathbf{u} = [\,1 \quad -1\,]^T$ tulee kuitenkin yksi ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{-2t}\mathbf{u} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ \forall t \in \mathbb{R}$ perusjärjestelmään.

Perusjärjestelmän toisen ratkaisun $\mathbf{x}_2$ löytämiseksi valitaan vektori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, joka ei ole A:n ominaisvektori eli jolle $(A+2I)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ eli jolle siis $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{u}$, ja etsitään ratkaisu $\mathbf{x}_2$ alkuehdolla $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{v}$ muodossa

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{tA}\mathbf{v} = e^{-2tI}e^{t(A+2I)}\mathbf{v} = e^{-2t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n(A+2I)^n\right)\mathbf{v} = e^{-2t}(\mathbf{v} + t(A+2I)\mathbf{v} + \frac{1}{2}t^2(A+2I)^2\mathbf{v} + \cdots).$$

Sarjan katkeamiseksi, ja mahdollisimman pian, vaaditaan nyt, että $(A+2I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eli että $\mathbf{v}$ on A:n ominaisarvoon $\lambda = -2$ liittyvä A:n yleistetty ominaisvektori. Tämä ehto ei rajoita $\mathbf{v}$:n valintaa, sillä itse asiassa (mikä, kuten voidaan osoittaa, ei ole sattumaa)

$$(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voidaan siis valita $\mathbf{v} = [\,1 \quad 0\,]^T$. Näin saadaan

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t}(\mathbf{v} + t(A+2I)\mathbf{v}) = e^{-2t}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = e^{-2t}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t \\ -t \end{bmatrix}.$$

Olisi helppo sijoittamalla todeta, että $\mathbf{x}_2$ on todellakin ratkaisu. Tietysti $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(0) = \det[\,\mathbf{u} \quad \mathbf{v}\,] \neq 0$.