Diff.yht. II, harj. 3, 20.–21.11.2012, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 sivua

Teht. 1. *Palauta differentiaaliyhtälö* $y'' - \dfrac{x}{3}y^{(3)} + xyy' - 2x^3 = 0$ *normaalimuotoiseksi 1. kl. systeemiksi. Onko tämä lineaarinen?*

Ratk. Normaalimuotoisena yhtälö kuuluu $y^{(3)} = \dfrac{3}{x}y'' + 3yy' - 6x^2$ $(x \neq 0)$. Merkitsemällä $y_1 = y$, $y_2 = y'$ ja $y_3 = y''$ (sekä kääntäen $y = y_1$) saadaan yhtäpitävä systeemi

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = \dfrac{3}{x}y_3 + 3y_1y_2 - 6x^2 \end{cases} \qquad (x \neq 0).$$

Tulotermin $3y_1y_2$ tähden systeemi ei ole lineaarinen.

Teht. 2. *Osoita, että funktiopari* $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \left([\,1 \quad e^t\,]^T, [\,e^{-t} \quad 2\,]^T\right)$ *on lineaarisen* 2×2*-homogeenisysteemin*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

perusjärjestelmä $\mathbb{R}$*:ssä.*

Ratk. Olkoon $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Tällöin funktio $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ on jatkuva. Koska

$$A(t)\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-e^{-t})e^t \\ 2e^t \cdot 1 + (-1)e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

niin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä. Samoin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä, sillä

$$A(t)\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} \\ 2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi pari $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on vapaa $\mathbb{R}$:ssä, sillä sen Wronskin determinantille on

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} \\ e^t & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - e^te^{-t} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Täten $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Teht. 3. *Etsi seuraavalle* 2×2*-homogeenisysteemille perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä ja anna myös yleinen ratkaisu:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2t & 3t^2 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \tag{1}$$

Ohje. *Toinen yhtälöistä sattuu olemaan yksinkertainen.*

Ratk. Merkitään $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Silloin

$$(1) \iff \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2tx_1(t) + 3t^2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2tx_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_2(t) = C_2e^{\int 2t\,dt} = C_2e^{t^2} \\ \dot{x}_1(t) - 2tx_1(t) = 3C_2t^2e^{t^2} \end{cases}.$$

Tässä

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) - 2tx_1(t) = 3C_2t^2e^{t^2} &\iff e^{-t^2}\dot{x}_1(t) - 2te^{-t^2}x_1(t) = 3C_2t^2 \iff \frac{d}{dt}(e^{-t^2}x_1(t)) = 3C_2t^2 \\ &\iff e^{-t^2}x_1(t) = C_1 + C_2t^3 \iff x_1(t) = C_1e^{t^2} + C_2t^3e^{t^2}. \end{aligned}$$

Täten (1):n yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{t^2} + C_2 t^3 e^{t^2} \\ C_2 e^{t^2} \end{bmatrix} = C_1 e^{t^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{t^2} \begin{bmatrix} t^3 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

kun $\mathbf{x}_1(t) = e^{t^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{t^2} \begin{bmatrix} t^3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Siis $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on (1):n perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. (Teoria toimii, sillä (1):n kerroinmatriisi on jatkuva.)

II tapa. Etsitään suoraan perusjärjestelmä $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Ensin valitaan yhtälölle $\dot{x}_2(t) = 2tx_2(t)$ ratkaisut $x_2(t) = 0$ ja $x_2(t) = e^{t^2}$ ja sitten valitaan saaduille yhtälöille $\dot{x}_1(t) = 2tx_1(t)$ ja $\dot{x}_1(t) = 2tx_1(t) + 3t^2 e^{t^2}$ vastaavasti ratkaisut $x_1(t) = e^{t^2}$ ja $x_1(t) = t^3 e^{t^2}$; tällöin saadaan ratkaisut $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} t^3 e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{bmatrix}$, jotka muodostavat vapaan parin $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ja siis perusjärjestelmän, sillä niiden determinantille pätee $\det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \begin{vmatrix} e^{t^2} & t^3 e^{t^2} \\ 0 & e^{t^2} \end{vmatrix} = e^{2t^2} \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Yleinen ratkaisu on nyt $\mathbf{x} = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Teht. 4. *Etsi seuraavan* 2×2*-homogeenisysteemin yleinen ratkaisu* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Lyhyesti, onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *stabiili vai epästabiili tasapainotila?* Tässä ja seuraavissa tehtävissä (ja jatkossa) käytetään merkintää $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Ratk. Kerroinmatriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ on vakiokertoiminen. Sen karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$ juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Etsitään näitä A:n ominaisarvoja vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ 3u_1 - 3u_2 = 0 \end{cases} \iff u_1 = u_2 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = -2$: $(A - (-2)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3u_1 + u_2 = 0 \\ 3u_1 + u_2 = 0 \end{cases} \iff u_2 = -3u_1 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nyt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Siis $\mathbf{x}(t) = \underline{C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ on yleinen ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä.

Vakiofunktio $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on systeemin triviaaliratkaisu, koska $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ eli koska $\mathbf{0}$ on systeemin *kriittinen piste*. Tällaista ratkaisua kutsutaan systeemin *tasapainotilaksi*. Koska $\lambda_1 = 2 > 0$, on tämä tasapainotila luentojen mukaan <u>epästabiili</u> (satulapiste, koska $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$). (Muita tasapainotiloja ei ole, sillä $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = -4 \neq 0$, joten $A\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$.)

Osoitetaan suoraan, että tasapainotila $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on epästabiili. Kiinnitetään $\varepsilon = 1 > 0$. Olkoon $\delta > 0$ kuinka pieni tahansa. Valitaan sellainen $a > 0$, jolla $a < \delta/\sqrt{2}$, ja asetetaan $\mathbf{x}_0 = a(1,1)$; tällöin $|\mathbf{x}_0| < \delta$. Silloin $\mathbf{x}(t) = a\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\mathbf{x}_0$ $\forall t \geq 0$ on ratkaisu, jolla $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Nyt $|\mathbf{x}(t)| = e^{2t}|\mathbf{x}_0| \to \infty$, kun $t \to \infty$. Täten $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}| \geq \varepsilon$ jollain $t \geq 0$, vaikka siis oli $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}| < \delta$.

Teht. 5. *Etsi seuraavalle* 2×2*-homogeenisysteemille perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Lyhyesti, onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *stabiili vai epästabiili tasapainotila?*

Ratk. Kerroinmatriisi $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ on vakiokertoiminen. Sen karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$ juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = -2$. Etsitään näitä A:n ominaisarvoja vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda_1 = -1$: $(A + I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff u_2 = 2u_1 \iff \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = -2$: $(A + 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff u_1 = u_2 \iff \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nyt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Koska $\lambda < 0$ ja $\lambda < 0$, niin vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on <u>stabiili</u> tasapainotila (ja ainoa tasapainotila, sillä $\det A = \lambda_1\lambda_2 = 2 \neq 0$).

Teht. 6. *Etsi seuraavalle* 3×3*-homogeenisysteemille perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Lyhyesti, onko vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *stabiili vai epästabiili tasapainotila?*

Ratk. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$ (jossa lisättiin kolmas rivi ensimmäiseen riviin, vähennettiin ensimmäinen sarake kolmannesta sarakkeesta, kehitettiin ensimmäisen rivin mukaan, vähennettiin ensimmäinen rivi toisesta rivistä ja lisättiin toinen sarake ensimmäiseen sarakkeeseen) juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = -2$. Etsitään näitä A:n ominaisarvoja λ vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda = 3$: $(A - 3I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = u_3 \\ u_2 = 2u_3 \end{cases} \iff$ $\mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja toiseen yhtälöön. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = 1$: $(A - I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = -u_3 \\ u_2 = 4u_3 \end{cases} \iff$ $\mathbf{u} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja vähennettiin kolmas yhtälö toisesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{t} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = -2$: $(A + 2I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_3 = u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa ensin lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja toiseen yhtälöön ja sitten jaettiin ensimmäinen ja toinen yhtälö 5:llä sekä vähennettiin nämä yhtälöt kolmannesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_3(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Näin ollen $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ on systeemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Koska $\lambda_1 = 3 > 0$, niin vakioratkaisu $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ on epästabiili tasapainotila (ja ainoa tasapainotila, sillä $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -6 \neq 0$).