Diff.yht. II, harj. 2, 13.–14.11.2012, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 sivua

Teht. 1. *Ratkaise eliminointikeinolla seuraava lineaarinen* 1. *kl. homogeenisysteemi:*

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x), \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2).$$

Ohje. *Kirjoita pari ensin perinteellisessä muodossa funktioiden* y_1 *ja* y_2 *avulla.*

Ratk. Funktio $\mathbf{y}$ on tämän vektoriyhtälön ratkaisu jos ja vain jos

$$y_1'(x) = -2y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x) \quad \text{ja} \tag{1}$$

$$y_2'(x) = 2y_1(x) - 2y_2(x). \tag{2}$$

Yhtälö (1) antaa

$$y_2(x) = 2y_1'(x) + 4y_1(x). \tag{3}$$

Derivoimalla yhtälö (1) puolittain (*vaara uusista, alkuperäistä yhtälöä toteuttamattomista ratkaisuista!*) ja sijoittamalla siihen sitten (2) ja (3) saadaan, että

$$y_1'' \overset{(1)}{=} -2y_1' + \frac{1}{2}y_2' \overset{(2)}{=} -2y_1' + \frac{1}{2}(2y_1 - 2y_2) = -2y_1' + y_1 - y_2 \overset{(3)}{=} -2y_1' + y_1 - (2y_1' + 4y_1) = -4y_1' - 3y_1,$$

joten y_2 eliminoitui, ja

$$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0. \tag{4}$$

Kääntäen, jos y_1 on (4):n ratkaisu ja y_2 määräytyy (3):sta, niin (1) toteutuu, ja

$$y_2' \overset{(3)}{=} 2y_1'' + 4y_1' \overset{(4)}{=} 2(-4y_1' - 3y_1) + 4y_1' = -4y_1' - 6y_1 \overset{(1)}{=} -4(-2y_1 + \frac{1}{2}y_2) - 6y_1 = 2y_1 - 2y_2,$$

eli myös (2) toteutuu (*uusien ratkaisujen vaara vältetty!*). Riittää siis ratkaista ensin 2. kl. yhtälö (4) y_1:lle ja sitten 0. kl. yhtälö (3) y_2:lle.

Nyt vakiokertoimisen homogeeniyhtälön (4) karakteristisen yhtälön $r^2 + 4r + 3 = (r+1)(r+3) = 0$ juuret ovat -1 ja -3, joten (4):n yleinen ratkaisu on $y_1(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$. Tällöin $y_1'(x) = -c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x}$, joten sijoitus (3):een antaa $y_2(x) = 2(-c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x}) + 4(c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}) = 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{-3x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Täten annetun homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} \\ 2c_1e^{-x} - 2c_2e^{-3x} \end{bmatrix} = c_1e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2e^{-3x}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Huom. Implikaatiolle (1)&(2) $\Rightarrow$ (3)&(4) käänteisen implikaation (3)&(4) $\Rightarrow$ (1)&(2) yllä olevan tapaisen osoittamisen sijasta riittäisi jälkikäteen huomata ratkaisuavaruuksista $\mathbb{R}$:ssä, että tietysti $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\} \subset \{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$, että teorian nojalla $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\}$ on 2-ulotteinen vektoriavaruus ja että, kuten nähtiin, $\{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$ on korkeintaan 2-ulotteinen vektoriavaruus; tällöin nimittäin $\{\mathbf{y} \mid (1)\&(2)\} = \{\mathbf{y} \mid (3)\&(4)\}$.

Teht. 2. *Palauta seuraavat skalaariyhtälöt* 1. *kl. systeemeiksi:*

(a) $y'' + \sin x\, y' + y = \cos x$,

(b) $y^{(4)} + x^4 y = \sin x$.

Ratk. (a) Olkoon y annetun toisen kertaluvun lineaarisen yhtälön ratkaisu jollain välillä I. Merkitään $y_1 = y$ ja $y_2 = y'$. Tällöin $y_1' = y' = y_2$ ja $y_2' = y'' = -y - \sin x\, y' + \cos x = -y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x$, joten $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ on välillä I seuraavan ensimmäisen kertaluvun lineaarisen systeemin ratkaisu:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x. \end{cases} \iff \mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sin x \end{bmatrix}\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

jossa $\mathbf{b}(x) = (0, \cos x)$. Kääntäen, jos $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ on tämän systeemin ratkaisu jollain välillä I, niin $y = y_1$ on alkuperäisen yhtälön ratkaisu välillä I, sillä $y' = y_1' = y_2$ ja siis $y'' = y_2' = -y_1 - \sin x\, y_2 + \cos x = -y - \sin x\, y' + \cos x$. Saatu systeemi on täten yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa.

(b) Sijoittamalla toiseen suuntaan $y_i = y^{(i-1)}$, kun $i = 1, 2, 3, 4$, ja toiseen suuntaan $y = y_1$ saadaan

$$y^{(4)} + x^4 y = \sin x \iff \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -x^4 y_1 + \sin x \end{cases} \iff \mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -x^4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

jossa $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ja $\mathbf{b}(x) = (0, 0, 0, \sin x)$.

Teht. 3. **(a)** *Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi* 1. *kl. systeemiksi:* $\begin{cases} \dot{y} = f(t, x, y) \\ \ddot{x} = g(t, x, y, \dot{x}) \end{cases}$.

(b) *Entä, jos toinen yhtälö kuuluukin* $\ddot{x} = g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$*?*

Ratk. **(a)** Olkoon (x, y) tämän systeemin ratkaisu jollain välillä I. Merkitään $z_1 = x$, $z_2 = y$ ja $z_3 = \dot{x}$. Tällöin (z_1, z_2, z_3) on seuraavan normaalimuotoisen 1. kl. systeemin ratkaisu välillä I:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = f(t, z_1, z_2) \\ \dot{z}_3 = g(t, z_1, z_2, z_3). \end{cases}$$

Kääntäen, jos (z_1, z_2, z_3) on tämän normaalimuotoisen 1. kl. systeemin ratkaisu jollain välillä I, niin $(x, y) = (z_1, z_2)$ on alkuperäisen systeemin ratkaisu välillä I. Siis systeemit ovat yhtäpitävät.

(b) Ensimmäisen yhtälön $\dot{y} = f(t, x, y)$ nojalla toinen yhtälö $\ddot{x} = g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ voidaan kirjoittaa muotoon $\ddot{x} = g(t, x, y, \dot{x}, f(t, x, y))$. Täten alkuperäisen systeemin kanssa yhtäpitävä normaalimuotoinen 1. kl. systeemi on nyt seuraava:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = f(t, z_1, z_2) \\ \dot{z}_3 = g(t, z_1, z_2, z_3, f(t, z_1, z_2)). \end{cases}$$

Teht. 4. *Olkoon funktio* y *AAT:n*

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = 0,$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 *avulla, että funktio* y *on määritelty koko* $\mathbb{R}$*:ssä.*

Ohje. *Väliarvolause.*

Ratk. Olkoon $f(x, y) = e^x \sin x \cos y$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tällöin f on jatkuva, ja $(\partial/\partial y) f(x, y) = -e^x \sin x \sin y$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Olkoon $a > 0$. Jos $|x| \leq a$ ja $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 < y_2$, niin väliarvolauseen perusteella on olemassa $\eta \in]y_1, y_2[$, jolla

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, \eta)(y_1 - y_2) \right| = e^x |\sin x| |\sin \eta| |y_1 - y_2| \leq e^a |y_1 - y_2|.$$

Täten f on suorakaiteessa $[-a, a] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva (nimittäin e^a-Lipschitz-jatkuva) muuttujan y suhteen. Siis globaalin OY-lauseen 4.6 oletukset ovat voimassa x:ää koskevalla välillä $I = \mathbb{R}$, joten AAT:n (maksimaalinen) ratkaisu y on (olemassa, yksikäsitteinen ja) määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

Teht. 5. *Sama kuin edellinen tehtävä, mutta nyt Poistumislauseen* 4.7 *avulla.*

Ohje. *Triviaaliratkaisut.*

Ratk. Edellisen tehtävän funktio f ja sen osittaisderivaatta $\partial f / \partial y$ ovat jatkuvia koko tasossa $\mathbb{R}^2$, joka on itsessään alue $D \subset \mathbb{R}^2$. Tällöin Poistumislauseen 4.7 mukaan AAT:llä on yksikäsitteinen maksimaaliratkaisu $y \colon I \to \mathbb{R}$, jossa väli I on avoin, ja pätee, että jokaista kompaktia (= suljettua ja rajoitettua) joukkoa $K \subset \mathbb{R}^2$ kohti löytyy sellaiset vakiot $a, b \in I$, $a \leq b$, joilla $(x, y(x)) \in D \setminus K$, kun $x \in I \setminus [a, b]$.

Huomataan, että DY on separoituva. Koska $\cos y = 0 \iff y = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, niin DY:llä on triviaaliratkaisu $y_n(x) = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ $\forall x \in \mathbb{R}$ kullakin $n \in \mathbb{Z}$. Koska $-\frac{1}{2}\pi < y(0) = 0 < \frac{1}{2}\pi$, niin tällöin on $-\frac{1}{2}\pi < y(x) < \frac{1}{2}\pi$ $\forall x \in I$ lokaalin OY-lauseen mukaan.

Olkoon $M \geq 0$. Tällöin joukko $K = [-M, M] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti. Olkoot a ja b vakiot kuten yllä. Nyt, jos $x \in I \setminus [a, b]$, niin $(x, y(x)) \notin K$ mutta $y(x) \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, joten $x \notin [-M, M]$. Täten, koska $0 \in I \cap [-M, M]$, niin $0 \in [a, b]$ eli $a \leq 0 \leq b$. Koska väli I on avoin, niin on olemassa pisteet $\alpha, \beta \in I$, joilla $\alpha < a$ ja $\beta > b$. Tällöin $\alpha, \beta \notin [-M, M]$, $\alpha < 0$ ja $\beta > 0$, joten $\alpha < -M$ ja $\beta > M$. Siis $I \supset [\alpha, \beta] \supset [-M, M]$. Väite $I = \mathbb{R}$ seuraa.

Teht. 6. *Harjoituksen* 1 *tehtävän* 2 *yleisessä ratkaisussa on neljä parametria. Osoita sitovasti, että tuo ratkaisu antaa kyseisen differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut.*

Ohje. *Lause* 5.4 *tai, jos haluat palauttaa systeemiksi, lause* 5.3 *(tai* 5.5*).*

Ratk. Tutkittavalle 4. kl. lineaariselle homogeeniselle vakiokertoimiselle yhtälölle $y^{(4)} - 7y'' + 6y = 0$ löydettiin ratkaisut

$$y_1(x) = e^{x\sqrt{6}}, \quad y_2(x) = e^{-x\sqrt{6}}, \quad y_3(x) = e^x, \quad y_4(x) = e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ja näiden avulla ratkaisuparvi $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4$ $(C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R})$. Olkoon $z\colon I \to \mathbb{R}$ mielivaltainen ratkaisu. Valitaan $x_0 \in I$. Osoitetaan, että kertoimet C_1, C_2, C_3, C_4 voidaan valita niin, että

$$y(x_0) = z(x_0), \quad y'(x_0) = z'(x_0), \quad y''(x_0) = z''(x_0), \quad y'''(x_0) = z'''(x_0).$$

Tällöin lauseesta 5.4 seuraa, että $z(x) = y(x)$ kaikilla $x \in I$.

Tätä varten kullakin $x \in \mathbb{R}$ kirjoitetaan

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{bmatrix} = Y(x) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

matriisin

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y_4'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y_4''(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y_4'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x\sqrt{6}} & e^{-x\sqrt{6}} & e^x & e^{-x} \\ \sqrt{6}e^{x\sqrt{6}} & -\sqrt{6}e^{-x\sqrt{6}} & e^x & -e^{-x} \\ 6e^{x\sqrt{6}} & 6e^{-x\sqrt{6}} & e^x & e^{-x} \\ 6\sqrt{6}e^{x\sqrt{6}} & -6\sqrt{6}e^{-x\sqrt{6}} & e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}$$

avulla. Osoitetaan, että matriisi $Y(x_0)$ on kääntyvä, jolloin yhtälöllä

$$Y(x_0) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(x_0) \\ z'(x_0) \\ z''(x_0) \\ z'''(x_0) \end{bmatrix}$$

on tasan yksi ratkaisu $(C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4$, joka siis on vaadittu.

Muodostetaan (Wronskin) matriisin $Y(x)$ (Wronskin) determinantti

$$W(x) = \det Y(x) = \begin{vmatrix} e^{x\sqrt{6}} & e^{-x\sqrt{6}} & e^x & e^{-x} \\ \sqrt{6}e^{x\sqrt{6}} & -\sqrt{6}e^{-x\sqrt{6}} & e^x & -e^{-x} \\ 6e^{x\sqrt{6}} & 6e^{-x\sqrt{6}} & e^x & e^{-x} \\ 6\sqrt{6}e^{x\sqrt{6}} & -6\sqrt{6}e^{-x\sqrt{6}} & e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}.$$

Havaitaan, että determinantin sarakkeista voidaan eksponenttitekijät ottaa determinantin eteen tuloksi $e^{x\sqrt{6}}e^{-x\sqrt{6}}e^xe^{-x} = 1$, jolloin siis $W(x) = W(0)$.

Nyt sieventämällä determinanttia $W(0)$ lisäämällä ensin toinen sarake ensimmäiseen ja kolmas sarake neljänteen ja tämän jälkeen vähentämällä neljäs sarake ensimmäisestä ja luvulla $1/2$ kerrottuna kolmannesta sekä sitten kehittämällä ensimmäisen sarakkeen suhteen ja tämän jälkeen kolmannen sarakkeen suhteen saadaan

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 6\sqrt{6} & -6\sqrt{6} & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & -6\sqrt{6} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -6\sqrt{6} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -\sqrt{6} & 1 & 0 \\ -6\sqrt{6} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \cdot 2 \begin{vmatrix} -\sqrt{6} & 1 \\ -6\sqrt{6} & 1 \end{vmatrix} = 20(-\sqrt{6} + 6\sqrt{6}) = 20 \cdot 5\sqrt{6} = 100\sqrt{6} \neq 0.$$

Siis myös $W(x_0) = W(0) \neq 0$. Täten matriisi $Y(x_0)$ on kääntyvä.

Huom. Nähtiin, että kuvaus $(C_1, C_2, C_3, C_4) \mapsto C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4$ on bijektio avaruudelta $\mathbb{R}^4$ tutkittavan homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön koko $\mathbb{R}$:ssä määriteltyjen ratkaisujen avaruudelle. Täten ratkaisuavaruus on neliulotteinen vektoriavaruus ja ratkaisujono (y_1, y_2, y_3, y_4) sen eräs kanta eli perusjärjestelmä.