**Diff.yht. II, harj. 1, 6.–7.11.2012, ratk. (Jouni Luukkainen), 3 sivua**

**1.** *Ratkaise lineaarinen 2. kl. differentiaaliyhtälö* $y'' - 3y' - 4y = 4x + 7$.

**Ratk.** Vastaavan homogeenisen yhtälön $y'' - 3y' - 4y = 0$ (muistakaamme, yritteelle $y(x) = e^{rx}$, kun $r \in \mathbb{C}$, saadun) karakteristisen yhtälön $r^2 - 3r - 4 = (r-4)(r+1) = 0$ juuret $r = 4$ ja $r = -1$ ovat erisuuria reaalilukuja, joten yhtälöllä on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = (e^{4x}, e^{-x})$ ja siis yleinen ratkaisu $y_h(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Epähomogeenisuustermi $4x+7$ ei näin ollen ole homogeenisen yhtälön ratkaisu, joten tehdään samaa muotoa oleva yrite $y(x) = Ax + B$ yksittäisen ratkaisun löytämiseksi määritettävin kertoimin $A, B \in \mathbb{R}$. Nyt $y' = A$ ja $y'' = 0$, joten sijoituksella ehdoksi tulee $0 - 3A - 4(Ax + B) = 4x + 7$ eli $x$:n eri potenssien kertoimia vertaamalla yhtälöryhmä $\begin{cases} -4A = 4 \\ -3A - 4B = 7 \end{cases}$, jonka ratkaisu on $x = y = -1$. Näin saatiin yksittäisratkaisu $y_p(x) = -x - 1$.

Yhtälön yleinen ratkaisu on $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - x - 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

**2.** *Ratkaise mukauttamalla lineaarista 2. kl. teoriaa seuraava lineaarinen 4. kl. homogeeniyhtälö:*

$$y^{(4)} - 7y'' + 6y = 0.$$

*Ei tarvitse tarkkaan perustella, että saat yhtälön kaikki ratkaisut.*

**Ratk.** Yritteelle $y(x) = e^{rx}$, kun $r \in \mathbb{C}$, saadaan karakteristinen yhtälö $r^4 - 7r^2 + 6 = (r^2 - 6)(r^2 - 1) = 0$, jonka juuret ovat erisuuret reaaliluvut $r = \pm\sqrt{6}$ ja $r = \pm 1$. Näin saadaan ratkaisunelikko $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (e^{x\sqrt{6}}, e^{-x\sqrt{6}}, e^x, e^{-x})$ ja siitä yhtälön lineaarisuuden ja homogeenisuuden tähden ratkaisuparvi $y(x) = C_1e^{x\sqrt{6}} + C_2e^{-x\sqrt{6}} + C_3e^x + C_4e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R})$.

Osoitettavaksi jää, että tässä ovat kaikki ratkaisut. [Se tehdään harjoitustehtävässä 2:6!]

**3.** *Määritä neljä ensimmäistä Picardin approksimaatiota AAT:lle*

$$y' = y + 1, \qquad y(0) = -1,$$

*ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.*

**Ratk.** Differentiaaliyhtälö on siis funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y + 1$, määräämä. Nyt $y_0(x) = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Yleisesti $y_{n+1}(x) = -1 + \int_0^x f(t, y_n(t))\,dt = -1 + \int_0^x (y_n(t) + 1)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 0$. Siis $y_1(x) = -1 + \int_0^x (y_0(t) + 1)\,dt = -1 + \int_0^x (-1 + 1)\,dt = -1 + \int_0^x 0\,dt = -1 + 0 = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_2(x) = -1 + \int_0^x (y_1(t) + 1)\,dt = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $y_3(x) = -1 + \int_0^x (y_2(t) + 1)\,dt = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Arvataan, että AAT:n (yksikäsitteinen) tarkka ratkaisu olisi $y(x) = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Sijoitus osittaakin, että AAT tällöin toteutuu. Huomataan, että $y_n = y$ kaikilla $n = 0, 1, 2, 3$.

**Huom.** Se, että iteraatio tuotti aina saman, johtui siitä, että AAT on yhtäpitävä integraaliyhtälön $y(x) = -1 + \int_0^x (y(t) + 1)\,dt$ kanssa ja että jo $y_0$ oli tarkka ratkaisu.

**4.** *Määritä neljä ensimmäistä Picardin approksimaatiota AAT:lle*

$$y' = y + 1, \qquad y(0) = 0,$$

*ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.*

**Ratk.** Nyt $y_0(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Yleisesti $y_{n+1}(x) = 0 + \int_0^x (y_n(t) + 1)\,dt = \int_0^x (y_n(t) + 1)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 0$. Siis $y_1(x) = \int_0^x (0 + 1)\,dt = \int_0^x 1\,dt = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_2(x) = \int_0^x (t + 1)\,dt = \frac{1}{2}x^2 + x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $y_3(x) = \int_0^x (\frac{1}{2}t^2 + t + 1)\,dt = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

AAT:n tarkka ratkaisu on $y(x) = e^x - 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Eksponenttifunktion kaikkialla pätevästä origokeskisestä Taylorin potenssisarjaesityksestä $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}(x^k/k!) = 1 + x + \cdots$ saadaan Taylorin sarja tarkalle ratkaisulle:

$$y(x) = e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tämän sarjan osasummat $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(x^k/k!)$, kun $n \geq 0$, ovat ratkaisun $y(x) = e^x - 1$ Taylorin polynomit. Havaitaan, että $y_n = T_n$ kaikilla $n = 0, 1, 2, 3$. Induktiolla voitaisiin osoittaa, että $y_n = T_n$ kaikilla $n \geq 0$. (Tällöin $y_n(x) \to e^x$, kun $n \to \infty$, tasaisesti välillä $[-a, a]$ kullakin $a > 0$.)

**5.** *Onko funktio $f(x, y) = x^2 \sin y$ joukossa $I \times J$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan $y$ suhteen, kun*
**(a)** *$I = \mathbb{R}$ ja $J = [0, 1]$,*
**(b)** *$I = [0, 1]$ ja $J = [0, 1]$,*
**(c)** *$I = [0, 1]$ ja $J = \mathbb{R}$?*
*Perustelut. Jos on, niin anna (jokin) käypä Lip-vakio.*

**Ratk.** On siis tutkittava, onko olemassa vakiota $M \in [0, \infty[$, jolla $f$ on $M$-Lipschitz suorakaiteessa $I \times J = \{(x, y) \mid x \in I, y \in J\}$ jälkimmäisen muuttujan $(y)$ suhteen eli jolla seuraava ehto pätee:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad \text{kaikilla } x \in I \text{ ja } y_1, y_2 \in J.$$

Tarvitaan Analyysi I:n *väliarvolause*: Jos $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä $]a, b[$, niin $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a)$ jollain $\xi \in ]a, b[$. Tällöin, jos on olemassa vakio $M \geq 0$, jolla $|\varphi'(t)| \leq M$ kaikilla $t \in ]a, b[$, niin $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq M|s - t|$ kaikilla $s, t \in [a, b]$ eli $\varphi$ on $M$-Lipschitz: tämä nähdään soveltamalla väliarvolausetta väliin $[s, t]$. Erityisesti, jos $\varphi$ on jatkuvasti derivoituva välillä $[a, b]$, jolloin $\varphi'$ on rajoitettu, niin $\varphi$ on Lipschitz-jatkuva.

Pannaan vielä merkille seuraava käänteinen yhteys Lipschitz-ehdon ja derivaattojen välillä. Olkoon $M \geq 0$ vakio ja $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio, joka on $M$-Lipschitz; tällöin $|\varphi'(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tämä seuraa derivaatan $\varphi'(x)$ määritelmästä $\varphi'(x) = \lim_{h \to 0}(\varphi(x + h) - \varphi(x))/h$ erotusosamäärien raja-arvona ja erotusosamäärille saatavasta arviosta $|\varphi(x + h) - \varphi(x)|/|h| \leq M$.

Palataan nyt tehtävän funktioon $f$. Huomataan, että $|(d/dy) \sin y| = |\cos y| \leq 1$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Täten

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x^2 \sin y_1 - x^2 \sin y_2| = x^2 |\sin y_1 - \sin y_2| \leq x^2 |y_1 - y_2|, \qquad \text{kun } x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

**(a)** Äskeisessä arviossa $x \mapsto D_2 f(x, 0) = x^2 \cos 0 = x^2$ ei ole rajoitettu välillä $I = \mathbb{R}$, joten <u>tasainen Lipschitz-ehto muuttujan $y$ suhteen ei voi päteä</u>. Osoitetaan tämä myös osittaisderivaattoja $D_2 f(x, y)$ käyttämättä. Olkoon $M \geq 0$. Kiinnitetään kaksi eri lukua $y_1, y_2 \in J$, esimerkiksi $y_1 = 0$ ja $y_2 = 1$, ja huomataan, että $\sin 0 = 0 < \sin 1$ ja $|y_1 - y_2| = 1$. Valitaan sellainen $x \in I$, jolla $|x| > \sqrt{M/\sin 1}$. Tällöin

$$\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} = x^2 \sin 1 > M.$$

Siis $f$ ei ole $M$-Lipschitz muuttujan $y$ suhteen suorakaiteessa $I \times J$.

**(b)** Osoitetaan, että <u>tasainen Lipschitz-ehto muuttujan $y$ suhteen pätee</u>. Itse asiassa

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq x^2 |y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2| \qquad \forall x \in I,\ y_1, y_2 \in J.$$

Täten $f$ on $M$-Lipschitz muuttujan $y$ suhteen Lipschitz-vakiolla $M = 1$. (Huomataan, että koska $D_2 f(1, 0) = \cos 0 = 1$, niin $M = 1$ on pienin eli paras mahdollinen Lip-vakio.)

**(c)** <u>Tasainen Lipschitz-ehto muuttujan $y$ suhteen pätee</u> (parhaalla) Lip-vakiolla $M = 1$ kuten (b)-kohdassa.

**6.** *Missä $\mathbb{R}^2$:n mahdollimman suurissa alueissa DY*

$$y' = f(x, y) = \sqrt[5]{(y - 1)^2}$$

*toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 ehdot? Perustele lyhyesti ehtojen voimassaolo.*
*Huom. DY on määritelty koko tasossa $\mathbb{R}^2$.*

**Ratk.** Funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (y - 1)^{2/5}$, on jatkuva, ja osittaisderivaattafunktio

$$(x, y) \mapsto D_2 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{2}{5}(y - 1)^{-3/5} = \frac{2}{5\sqrt[5]{(y - 1)^3}}$$

on määritelty ja jatkuva avoimissa puolitasoissa $D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\}$ ja $D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1\}$. Tällöin lemman 4.2 nojalla $f$ toteuttaa alueissa $D_\pm$ lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan $y$ suhteen eli jokaista pistettä $(x_0, y_0) \in D_\pm$ kohti löytyy sellaiset $p, q > 0$, että $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \le p, |y - y_0| \le q\} \subset D_\pm$ ja funktio $f$ on $K$:ssa tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan $y$ suhteen. Siis alueissa $D_\pm$ tutkittava DY toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 oletukset.

Osoitetaan, että alueet $D_\pm$ ovat maksimaalisia tässä suhteessa. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ mikä tahansa alue, joka leikkaa suoraa $y = 1$. Osoitetaan, että $f$ ei toteuta lokaalin OY-lauseen 4.4 oletuksia alueessa $D$. Valitaan $x_0 \in \mathbb{R}$ niin, että $(x_0, y_0) = (x_0, 1) \in D$. Olkoot $p, q > 0$ sellaiset, että $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0|, |y - y_0| \le q\} \subset D$. Nyt, jos $1 < y < 1 + q$, niin $(x_0, y) \in K$ ja

$$\frac{|f(x_0,y) - f(x_0,y_0)|}{|y - y_0|} = \frac{|(y-1)^{2/5} - 0|}{|y-1|} = |y-1|^{-3/5} \to \infty, \qquad \text{kun } y \to 1.$$

Täten $f$ ei voi olla tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan $y$ suhteen $K$:ssa. Tämä nähdään myös siitä, että jos $f$ olisi $M$-Lipschitz $y$:n suhteen $K$:ssa jollain $M \ge 0$, niin olisi $|D_2 f(x,y)| \le M$ kaikilla $(x,y) \in K$, joilla $y \ne 1$, vastoin sitä, että

$$|D_2 f(x_0, y)| = \tfrac{2}{5}|y-1|^{-3/5} \to \infty, \qquad \text{kun } y \to 1.$$

Ei siis päde, että $f$ toteuttaisi lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan $y$ suhteen $D$:ssä.

**Huom.** Kullakin $x_0 \in \mathbb{R}$ on AAT:llä $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = 1$, triviaalin ratkaisun $y(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ohella ratkaisu $y(x) = 1 + \big(\tfrac{3}{5}(x - x_0)\big)^{5/3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, ja koska tällä on $y'(x_0) = 0$, niin näitä kahta ratkaisua pisteessä $x_0$ leikkaamalla ja yhteen liimaamalla saadaan kaksi muutakin ratkaisua $\mathbb{R}$:ssä. Tämä ratkaisujen epäyksikäsitteisyyskin osoittaa lokaalin OY-lauseen 4.4 oletusten rikkoutuvan pisteen $(x_0, 1)$ sisältävissä alueissa.