

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

2. kurssikoe 15.12.2012

1. Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(x^3 + \frac{3x + 1}{2x + 3} \right).$$

Tarkka perustelu!

2. Tutki, missä funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, missä

$$f(x) = e^{1-x^2}, x \in \mathbb{R},$$

on kasvava.

3. Osoita, että yhtälöllä

$$e^x + e^{x^3} = 1$$

on ainakin yksi ratkaisu.

4. Tee toinen tehtävistä 4.1 tai 4.2.

4.1 Oletetaan, että $f:]0, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva koko välillä. Oletetaan lisäksi, että f on derivoituva välillä $]1, 2[$ ja että

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \infty.$$

Osoita, ettei f ole derivoituva kohdassa $x = 1$.

4.2 Oletetaan, että $f:]0, 3[\rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva koko välillä. Oletetaan, että $f'(1) = 4$ ja $f'(2) = 6$. Tutkitaan myös yhtälöllä $g(x) = f(x) - 5x$ määriteltyä apufunktiota.

(a) Osoita, ettei g voi saavuttaa välin $[1, 2]$ päätepisteissä pienintä arvoa, jonka g saa väillä $[1, 2]$.

(b) Osoita, että välillä $]1, 2[$ on kohta c , missä pätee $f'(c) = 5$. Huom. Emme tiedä, että f' olisi jatkuva, joten Bolzanon lausetta ei voi käyttää!