MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Tehtävät viikolle 49

Näissä harjoituksissa käsitellään monisteen loppuosan transkendenttifunktioita.

Alkuviikon tehtävät

O.1 Derivoi $x^{\frac{2}{5}}$
(a) tulkiten ko. funktio yhdistetyksi funktioksi ja käyttäen potenssin ja käänteisfunktion derivoimissääntöjä;
(b) soveltaen potenssin derivointisääntöä murtopotenssiin.

O2. Hahmottele samaan kuvaan kuvaajat lausekkeille e^x, e^{-x} ja $-e^{-x}$. Huomaa "peilaukset". Hahmottele näiden avulla kuvaajat hyperbolisille funktioille sinh ja cosh.

K1. Osoita juuren määritelmän ja potenssin (eksponenttina kokonaisluku) laskusääntöjen avulla, että kun $x > 0$, pätee
(a)
$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m;$$
(b)
$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}.$$

K2. Määritä
$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(\frac{1}{x})}{1-x}.$$
Voit huomata, että kyseessä on erotusosamäärä. Voit myös käyttää l'Hospitalin säännön helpointa muotoa sivulta 62 (mikä on itse asiassa sama asia.)

K3. Johda funktion $\sinh x$ käänteisfunktiolle logaritmilauseke ja derivointikaava. Tutki monistetta sivuilta 84 ja 85.

Loppuviikon tehtävät

O3. Laske $f'(2)$ kun kaikilla x on $f(x) = \operatorname{arsinh} x$.

O4. Missä funktio $\sin x$ on konveksi? Konveksisuuden määritelmä on monisteessa sivulla 61.

K4. Tarkastellaan funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ missä $f(x) = x + \sin x$ ja $g(x) = \frac{x}{2} + \sin x$. Selvitä funktioiden lokaalit ääriarvot.

K5. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla $x > 0$ pätee

$$\cos x > 2 - \cosh x.$$

(Tehtävä on ensimmäinen askel kohti jännittävämpää havaintoa. Mikäli mahdollista, kannattaa tarkastella graafisella laskimella piirrettyjä funktioiden $\cos x$ ja $2 - \cosh x$ kuvaajia välillä $[-1, 1]$. Näet jotain, mikä vaatii selitystä. Selitystä voi antaa tällä kurssilla väliarvolauseen avulla. Mutta luontevampi selvyys asiaan tulee kurssilla analyysi II Taylorin polynomien yhteydessä.)

K6. Johda yhtälö

$$D\text{ar}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

kun $x > 1$. Tutki monisteen sivuja 84 ja 85!