

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

### Analyysi I

#### Tehtävät viikolle 48

Näissä harjoituksissa käsitellään monisteen lukuun 8 - väliarvolause jne. - liittyviä kysymyksiä. Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttujen funktioiden kuten trigonometristen funktioiden jne. koulusta tuttuja ominaisuuksia kuten jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

Osa tehtävistä muistuttaa koulutehtäviä: perustele ratkaisusi tämän kurssin lauseiden avulla.

#### Alkuviikon tehtävät

O.1 Tarkastellaan funktiota funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , joka on määritelty yhtälöllä  $f(x) = x^4$ . Määritä väliarvolauseessa mainittu kohta  $\xi$ .

O2. Tutki funktion  $f : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$  mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja, kun

$$f(x) = |(x - 2)^2 - 1|$$

kaikilla  $x \in [0, 7]$ . Huolelliset perustelut! (Tarkista monisteen sivulta 57, miten lokaaliset ääriarvot määritellään siellä.)

K1. Oletetaan, että funktio  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva välillä  $[0, 1]$  ja derivoituva välillä  $]0, 1[$ . Oletetaan, että  $f(0) = 3$  ja että kaikilla  $x \in ]0, 1[$  pätee  $-1 < f'(x) < 2$ . Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta  $f(1)$ ?

K2. Oletetaan, että funktio  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva välillä  $[0, 1]$  ja derivoituva välillä  $]0, 1[$ . Oletetaan, että  $f(1) = 3$  ja että kaikilla  $x \in ]0, 1[$  pätee  $-1 < f'(x) < 2$ . Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta  $f(0)$ ?

K3. Oletetaan, että  $f$  on jatkuva välillä  $[0, 1]$  ja että kaikilla  $x \in ]0, 1[$  pätee

(a)  $f'(x) \leq 1$ ;

(b)  $f'(x) \leq x^7$ .

Mitä tapauksissa (a) ja (b) tiedetään arvosta  $f(1)$ , jos  $f(0) = 2$ ? (b)-kohdassa kannattaa tutkia lausekkeella  $\frac{1}{8}x^8 - f(x)$  määriteltyä ”apufunktio-

ta”.

### Loppuviikon tehtävät

O3. Oletetaan, että  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja derivoituva. Oletetaan lisäksi, että kaikilla  $x \in ]-1, 1[$  pätee, että  $|f'(x)| \leq 10$ . Anna esimerkki sellaisesta luvusta  $\delta > 0$ , että kaikilla  $x, y \in [-1, 1]$  pätee: jos  $|x - y| < \delta$ , niin  $|f(x) - f(y)| < 10^{-2010}$ .

O4. Osoita, että funktiolla  $f(x) = x^7$  on kaikkialla määritelty käänteisfunktio  $\sqrt[7]{y}$ . Missä tämä on derivoituva? Pohdi erityisesti kohtaa  $y = 0$ . Monisteesta kannattaa katsoa sivuja 43 ja 50.

K4. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla  $x$  pätee  $|\cos x - 1| \leq |x|$ . (Kannattaa muistaa, että  $\cos 0 = 1$ .)

K5. Oletetaan, että  $a_1, \dots, a_n$  ovat reaalilukuja. Millä  $x$  ns. neliösumma  $(x - a_1)^2 + \dots + (x - a_n)^2$  saa pienimmän mahdollisen arvonsa?

K6. Oletetaan, että  $h > 0$  ja että funktio  $f : ]x_0 - h, x_0 + h[ \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva välillä  $]x_0 - h, x_0 + h[$  ja derivoituva väleillä  $]x_0 - h, x_0[$  ja  $]x_0, x_0 + h[$ . Oletetaan, lisäksi, että  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$ . Osoita, että  $f$  on derivoituva kohdassa  $x_0$  ja että  $f'(x_0) = A$ . Vihje: sovelta väliarvolauseetta erotusosamäärään.