MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Tehtävät viikolle 47

Näissä harjoituksissa käsitellään funktion derivoituvuuteen liittyviä kysymyksiä. Keskeisenä teemana on ”karakterisaatiolause”(differentioituvuus), joka tarjoaa uuden näkökulman derivoituvuuteen. Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttujen funktioiden kuten trigonometristen funktioiden jne. koulusta tuttuja ominaisuuksia kuten jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

Nyt on tärkeää palauttaa mieleen lukion pitkän matematiikan derivointisäännöt.

Alkuviikon tehtävät

O.1 Määritellään $f(x) = x^2$. Osoita, että

$$f(1+h) = f(1) + 2h + h^2.$$

Voiko tästä päätellä suoraan funktion f derivaatan kohdassa $x = 1$?

O2. Määritellään $f(x) = x^2$. Esitä funktion muutos muodossa

$$f(1+h) = f(1) + 7h + h\alpha(h) = 1 + 7h + h\alpha(h).$$

Onko tulos ristiriidassa karakterisaatiolauseen kanssa?

K1. Derivoi
(a) $\cos^3 x^4$;
(b) $\sin^2(\cos^3 x^4)$;
(c) $\sqrt{\sin^2(\cos^3 x^4) + 1}$.
Tehtävässä kannattaa muistaa yhdistetyn funktion derivointisääntö!

K2. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = x|x|$. Millä x on olemassa derivaatta $f'(x)$? Entä toinen derivaatta $f''(x)$? Entä kolmas derivaatta $f'''(x)$?

K3. Oletetaan, että $f'(1) = 4$. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Vihje: täydennä tutkittava lauseke muotoon, missä esiintyvät erotusosamäärän muodot
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{ja} \quad \frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}.$$

Loppuviikon tehtävät

O3. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1,3]$ ja derivoituva välillä $]1,3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1,3[$ pätee $1 < f'(x) < 4$. Mitä tiedetään arvosta $f(3)$, jos $f(1) = 1$? Miten voit perustella tuloksesi kurssilla tähän mennessä olleiden tietojen nojalla?

O4. Tulon derivoituvuussäännön johtaminen karakterisaatiolauseen avulla.) Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia kohdassa x. Tällöin karakterisointilauseen nojalla on
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h)$$
ja
$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h),$$
missä $\varepsilon_1(h) \to 0$ ja $\varepsilon_2(h) \to 0$ kun $h \to 0$. Muokkaa tuloa
$$(f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h))\,(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h))$$
ja päättele sekä tulon fg derivoituvuus kohdassa x että tulon derivointisääntö.

K4. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = \sqrt{x}$ kun $x \geq 0$ ja $f(x) = -\sqrt{-x}$ kun $x < 0$. Missä f on derivoituva?

K5. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^5$. Tulkitse yhtälö
$$(a+h)^5 = a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$$
karakterisaatiolauseen avulla. Mikä on tässä $f(a)$, mikä $f'(a)h$ ja mikä $h\,\varepsilon(h)$? Voidaanko funktion derivaatta kohdassa $x = a$ nähdä suoraan kyseisestä yhtälöstä?

K6. Oletetaan, että $p > 0$. Osoita, että yhtälöllä $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ on enintään kaksi erisuurta reaalijuurta. Vihje: Merkitse yhtälön vasen puoli $= f(x)$. Muista Rollen lause ja väliarvolause!