**MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS**
**Analyysi I**
**Tehtävät viikolle 46**

## Alkuviikon tehtävät

Näissä harjoituksissa ei saa käyttää derivaattaa koskevia lukion tietoja.

O.1 Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x \in [0, 1]$, jolle pätee $f(x) = 2$.

O2. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x$, jolle pätee $f(x) = 2012$.

K1. Osoita, että

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$

on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

K2. Osoita määritelmien perusteella, että

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \to \infty.$$

kun $x \to \infty$ ja

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \to -\infty.$$

kun $x \to -\infty$.

K3. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $x$, jolle

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 2012.$$

## Loppuviikon tehtävät

O3. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x + x^3$ määritellyllä funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mitä ominaisuuksia tiedät tälle käänteisfunktiolle?

O4. Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita ehdolla $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ määritelty funktio saa, on pienin arvo. Toisin sanoen osoita, että on olemassa sellainen $a$, että kaikilla $x$ pätee $f(x) \geq f(a)$.

K4. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x + x^3$ määritellyllä funktiolla $f\colon [0,1] \to [0,2]$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon [0,2] \to [0,1]$.

K5. Määritellään funktio $f : [0,\infty[ \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$. Onko se aidosti kasvava? Entä jatkuva? Onko funktiolla $f$ käänteisfunktiota?

K6. Oletetaan, että jatkuva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla $x$ epäyhtälön $0 \leq f(x) \leq 3$. Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita yhtälöllä

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$$

määritelty funktio saa, on suurin arvo. Toisin sanoen osoita, että on olemassa sellainen $a$, että kaikilla $x$ pätee $g(x) \leq g(a)$.