MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Tehtävät viikolle 45

Alkuviikon tehtävät

O.1 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

ja

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

O2. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

K1. Selvitä lauseen 5.4 avulla

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3+x^2+x}{x^2+7}.$$

K2. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{7x+1} = \frac{1}{7}.$$

K3. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 3+} \frac{5}{x-3} = \infty.$$

Loppuviikon tehtävät

O3. Oletetaan, että funktio $f\colon]0,2[\to \mathbb{R}$ on kasvava. Oletetaan, että se ei ole jatkuva kohdassa $x=1$. Mitä tällöin tiedämme?

O4. Oletetaan, että funktio $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikille $n = 0, 1, 2, \dots$ ehdot $f(x) = x - 2n$ kun $2n \leq x \leq 2n + 1$ ja $f(x) = 2n + 2 - x$ kun $2n + 1 < x < 2n + 2$. Piirrä funktion kuvaaja. Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x \to \infty} f(x)?$$

K4. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \to 3+} \frac{5 + x}{3 - x} = -\infty.$$

K5. Oletetaan, että $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ on kasvava ja että $a < c < b$. Osoita, että

$$\lim_{x \to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c+} f(x).$$

K6. Oletetaan, että $f :]0, 2[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(1) = 3$ ja $f'(1) = 5$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla x pätee: jos $1 < x < 1 + \delta$, niin $(5 - \frac{1}{7})(x - 1) < f(x) - 3 < (5 + \frac{1}{7})(x - 1)$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään $E(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. Kun $|x - 1|$ kyllin pieni (ja $x \neq 5$), niin $|E(x) - 5| < \frac{1}{7}$ …Kannattaa piirtää kuva!)