Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Analyysi I

Tehtävät viikolle 44

Kakkosperiodi alkaa. Teemana ovat nyt funktion raja-arvo ja sen sukulaiset.

Alkuviikon tehtävät (O1-O2; K1 - K3)

O1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

on tosi.

O2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = 1$$

on epätosi.

K1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

on tosi.

K2. Onko funktio $f(x) = |x|$ derivoituva kohdassa $x = 0$? Tarkka perustelu derivoituvuuden ja funktion raja-arvon määritelmien avulla!

K3. Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien avulla, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on jatkuva kohdassa $x = 16$.

Loppuviikon tehtävät (O3-O4; K4 - K6)

O3. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on derivoituva kohdassa $x = 16$ ja että $f'(16) = 1/8$.

O4. Määritellään funkto $f :]1,4[\to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}.$$

Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio f on derivoituva kohdassa $x = 3$ ja että $f'(3) = -\frac{1}{49}$.

K4. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = 1$$

on epätosi.

K5. Oletetaan, että funktio g toteuttaa kaikilla $x \in]-1,1[$ epäyhtälön $|g(x)| < 7$. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 g(x)$ on derivoituvaa kohdassa $x = 0$ ja, että $f'(0) = 0$. Tutki rohkeasti erotusosamäärän etäisyyttä luvusta 0.

(Huomaa, että voi esimerkiksi olla $g(x) = 0$ kun x on rationaalinen ja $g(x) = 1$ kun x on irrationaalinen. Funktio voi olla siis tehtävän tuloksen perusteella olla derivoituva yhdessä kohdassa ja epäjatkuva kaikkialla muualla.)

K6. Oletetaan, että $h > 0$ ja funktio f on määritelty kaikilla $x \in]x_0-h, x_0+h[$ ja että $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, missä $b \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \neq x_0$ pätee: jos $|x - x_0| < \delta$, niin $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$. Vihje: voi auttaa, jos tarkastelet tapauksia $b < 0$ ja $b > 0$ erikseen. (Voit myös yrittää käyttää ”kolmioepäyhtälön vasenta puolta”.)