MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Tehtävät viikolle 41

Tällä kertaa tarkastellaan viimeisiä asioita lukujonoista ja aloitetaan funktion raja-arvon opiskelu. Funktion raja-arvon käsitteen erikoitapauksina seuraamme tulevat heti jatkuvuus ja derivoituvuus. Uutena tuttavuutena kuvaan tulee myös Bernoullin epäyhtälö.

Alkuviikon tehtävät

O.1 Osoita, että $7^n \geq 1 + 6n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.

O2. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{7^n} = 0.$$

K1. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3n+4} = \infty.$$

K2. Selvitä luvun e määritelmän avulla

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{5n})^n.$$

Tehävässä saa käyttää tietoa: jos $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, niin $\sqrt[5]{x_n} \to \sqrt[5]{a}$.

K3. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$.

(a) Oletetaan, että $a > 0$. Osoita, että $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Vihje: $y_n > \frac{a}{2}$ kun n on kyllin suuri. (Tulos ilmaistaan usein sääntönä $a\infty = \infty$, kun $a > 0$.)

(b) Oletetaan, että $a < 0$.Osoita, että $x_n y_n \to -\infty$ kun $n \to \infty$. Tulos ilmaistaan usein sääntönä $a\infty = -\infty$, kun $a < 0$

(c) Onko olemassa sääntöä $0\infty = \ldots$?

Loppuviikon tehtävät

O3. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\infty.$$

O4. Määritellään $f(x)=x^2+3x$. Osoita, että

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4.$$

K4. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\infty.$$

K5. Osoita, että yhtälöllä $f(x)=\sqrt{x}$ määritelty funktio on jatkuva kohdassa $x=1$.

K6. Osoita, että yhtälöllä $f(x)=\sqrt{x}$ määritelty funktio on derivoituva kohdassa $x=1$.