MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2012
Tehtävät viikolle 40

Tällä kertaa tulee käyttöön määritelmän lisäksi lukujonon raja-arvoja koskevia lauseita. Tutustumme myös supremumeihin ja infimumeihin ja näiden käyttöön.

Alkuviikon tehtävät

O.1 Selvitä lauseen 4.7 avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2n+2}.$$

Muista lauseen "jos, niin" -rakenne! Tehtävässä saa pitää tunnettuna vakiojonon raja-arvoa sekä tietoa, että $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$.

O2. Määritä joukon

$$\{\frac{n+1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

supremum ja infimum. Onko joukolla suurinta tai pienintä alkiota?

K1. Selvitä lauseen 4.7 avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n}{3n^2-2}.$$

Muista lauseen "jos, niin" -rakenne! Tehtävässä saa pitää tunnettuna vakiojonon raja-arvoa sekä tietoa, että $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$.

K2. Oletetaan, että $x_n \to a$ kun $n \to \infty$. Osoita, että on olemassa kynnys K, joille kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n| \leq |a| + 1.$$

Voiko luvun 1 korvata luvulla 10^{-1000}? Huom: koska äärellisessä joukossa reaalilukuja on aina suurin alkio, tästä tuloksesta seuraa tulos: jokainen suppeneva lukujono on rajoitettu.

K3. Oletetaan, että kaikilla n pätee $x_n \leq y_n$. Lisäksi oletetaan, että jono (x_n) on nouseva ja jono y_n suppenee. Osoita, että jono (x_n) suppenee.

Loppuviikon tehtävät

O3. Oletetaan, että
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$
ja että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa kokonaisluku K, jolle kaikilla $n > K$ pätee
$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$
Tehtävä on erityisen "läpinäkyvä", jos tarkastellaan erikseen tapauksia $a < 0$ ja $a > 0$. Piirrä kuva kummastakin tapauksesta.

O4. Induktio!?!?... Mitä tiedät siitä? Mitä haluat tietää siitä?
Osoita, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

K4. Oletetaan, että jono (x_n) suppenee. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n)^7}{n} = 0.$$

Vihje: huomaa, että suppeneva jono on aina rajoitettu.

K5. Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että on olemassa reaaliluku $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 7\}$ ja että lisäksi $a^2 = 7$. (Tehtävässä osoitetaan siis, että luvun $\sqrt{7}$ olemassaolo seuraa reaalilukujen aksiomeista!)

K6. Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että jonon (x_n) suppenee ja sen raja-arvo on $\sqrt{7}$, jos määritellään $x_1 = 3$ ja kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{7}{x_n}).$$

Lisäkysymyksiä (ei vaadita tehtävän ruksaamiseen): (a) Osaatko selittää, miksi jono näyttää suppenevan nopeasti? (b) Osaatko antaa esimerkkiä indeksistä n jolle $|x_n - \sqrt{7}| < 10^{-100}$?