

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

### Analyysi I

#### Tehtävät viikolle 38

Huom: Joissakin tehtävissä on hyötyä tiedoista  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ,  $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ , jne. (Nämä voi tarkistaa suorittamalla kertolaskut.)

#### Alkuviikon tehtävät

O.1 Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön  $|x - 3| < 2^{-100}$ ? Arvaa ensin vastaus ajattelemalla erotuksen itseisarvoa etäisyytenä. Todista sitten väite itseisarvolemman avulla ( $|x| < a$  jos ja vain jos  $-a < x < a$ ; tässä  $a$  on positiivinen.) Anna vastaus välin muodossa. Käsittele epäyhtälöitä huolellisesti!

O2. Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön  $|2x - 7| < 1$ ? Anna vastaus välin muodossa. Muuta epäyhtälö ensin muotoon  $|x - a| < b$ .

K1. Etsi sellainen luku  $K > 0$ , että kaikilla välille  $]0, 2[$  kuuluvilla luvuilla  $x$  pätee  $|x^2 - 1| \leq K|x - 1|$ . Arvioi!

K2. Etsi sellainen luku  $K > 0$ , että kaikilla välille  $]0, 2[$  kuuluvilla luvuilla  $x$  pätee  $|x^3 - 1| \leq K|x - 1|$ .

K3. (a) Minkä välin muodostavat ne reaalityöt  $x$ , joiden likiarvo kahden desimaalin tarkuudella on 23,14. Muistele koulun pyöristyssääntöjä.

(b) Oletetaan, että  $|x - e^\pi| < 2^{-1}10^{-1}$ . Mitä tiedät tämän nojalla luvun  $x$  desimaalikehitelmästä?

(c) Entä jos  $|x - e^\pi| < 2^{-1}10^{-23}$ ?

(Luvun  $e^\pi$  kehitelmä alkaa näin:

23,14069263277926900572908636794854738026610624260021.)

#### Loppuviikon tehtävät

O3. Etsi luku  $K > 0$ , jolle kaikille välille  $[1, 3]$  kuuluvilla  $x$  pätee  $|2x^2 + x - 10| \leq K|x - 2|$ . Huom: lausekkeen  $2x^2 + x$  arvo kohdassa  $x = 2$  on 10. Siksi kannattaa lähteä liikkeelle näin:  $(2x^2 + x) - 10 = (2x^2 + x) - (8 + 2) = (2x^2 - 8) + (x - 2)$ .

O4. Etsi luku  $K > 0$ , jolle kaikille välillä  $[0, 2]$  kuuluvilla  $x$  pätee  $|(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) - (-2)| \leq K|x - 1|$ . Huom: lausekkeen  $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$  arvo kohdassa  $x = 1$  on  $-2$ . Katso tehtävien alussa olevia kaavoja...

K4. Perustele itseisarvon tarkan määritelmän avulla, että

- (a)  $|x| \geq 0$ ;
- (b)  $|x| = |-x|$ ;
- (c)  $|xy| = |x||y|$ . (Kumpikin luvuista voi olla toisesta riippumatta  $< 0$ ,  $= 0$  tai  $> 0$ . Käy läpi kaikki 9 tapausta.)

K5. Etsi luku  $K > 0$ , jolle kaikilla välin  $]1, 3[$  pisteillä  $x$  pätee

$$\left| \frac{x+2}{2x+3} - \frac{4}{7} \right| \leq K|x-2|.$$

Kannattaa laskea itseisarvojen sisällä oleva erotus ja arvioida tämän itseisarvoa ylöspäin niin, että pääset muotoon ”vakio kertaa  $|x - 2|$ ”.

K6. Etsi sellainen luku  $h > 0$ , että

$$\left| \frac{x+2}{2x+3} - \frac{4}{7} \right| < 7777^{-7777}$$

aina kun  $|x - 2| < h$ . Kannattaa soveltaa tehtävän K5 tulosta!