

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Analyysi I

Tehtävät viikolle 37

Alkuviikon tehtävät (ohjaustehtävät O1 - O2; kotitehtävät K1 - K3)

O1. Luvun x käänteisluku on sellainen yksikäsitteinen luku y , että $xy = 1$. Miksi luvulla 0 ei ole käänteislukua; ts. miksi nolllalla ei saa jakaa?

O2. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{n+1}{n^2+2} \leq \frac{2}{n}.$$

K1 (a) Osoita, että $\sqrt[3]{2}$ on irrationaalinen.

(b) Osoita, että $\sqrt{6}$ on irrationaalinen.

K2. Onko $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

K3. Onko $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

Loppuviikon tehtävät (O3 - O4; K4 - K6)

O3. Oletetaan tunnetuksi, että $\sqrt{3}$ on irrationaalinen. Onko $\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+5}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

O4. (a) Oletetaan, että $0 < x < y$. Osoita, että $x^2 < y^2$.

(b) Oletetaan, että $1 < x$. Päteekö, että $x^3 < x^7$? Perustelu!

K4. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{3n+1}{2n+5} < 2.$$

K5. Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{3n+1}{2n+5} > \frac{1}{3}.$$

K6. Oletetaan, että $n > 10^{100}$. Osoita, että

$$2 < \frac{2n+5}{n+2} < 2 + 10^{-100}.$$