

Mallivastaukset vk 38, loppupuoli

19. syyskuuta 2012

O3: Ol $x \in [1, 3]$. Siis

$$\begin{aligned} |2x^2 + x - 10| &= |(2x^2 - 8) + (x - 2)| \leq |2x^2 - 8| + |x - 2| = 2|x - 2||x + 2| + |x - 2| \\ &= (2|x + 2| + 1)|x - 2| \leq (2 \cdot 5 + 1)|x - 2| = 11|x - 2|. \end{aligned}$$

Kun valitaan $K \geq 11$, niin tehtävän epäyhtälö toteutuu.

O4: Ol $x \in [0, 2]$. Siis

$$\begin{aligned} |(x^3 - 2x^2 + 3x - 4) - (-2)| &= |(x^3 - 1) - (2x^2 - 3x + 1)| = |(x - 1)(x^2 + x + 1) - (x - 1)(2x - 1)| \\ &\leq |x - 1||x^2 + x + 1| + |x - 1||2x - 1| \leq (|x^2 + x + 1| + |2x - 1|)|x - 1| \\ &\leq (|2^2 + 2 + 1| + |2 \cdot 2 - 1|)|x - 1| \leq 10|x - 1|. \end{aligned}$$

Kun valitaan $K \geq 10$, niin tehtävän epäyhtälö toteutuu.

K4: Itseisarvo määritellään seuraavasti:

$$|x| = x, \text{ kun } x \geq 0 \text{ ja } |x| = -x, \text{ kun } x \leq 0$$

- (a) (i) Oletetaan $x \geq 0$. Tällöin $|x| = x \geq 0$
(ii) Oletetaan $x \leq 0$. Tällöin $|x| = -x \geq 0$.
- (b) (i) Oletetaan $x \geq 0$. Siis $-x \leq 0$. Tällöin $|x| = x = -(-x) = |-x|$.
(ii) Oletetaan $x \leq 0$. Siis $-x \geq 0$. Tällöin $|x| = -x = |-x|$.
- (c) (i) Ol $x = 0, y = 0$. Nyt $|xy| = |0 \cdot 0| = |0| = 0 = 0 \cdot 0 = |0||0| = |x||y|$.
(ii) Ol $x \geq 0, y = 0$. Nyt $|xy| = |x \cdot 0| = |0| = 0 = x \cdot |0| = |x||0| = |x||y|$.
(iii) Ol $x \leq 0, y = 0$. Nyt $|xy| = |x \cdot 0| = |0| = 0 = -x \cdot |0| = |x||0| = |x||y|$.
(iv) Ol $x = 0, y \geq 0$. Nyt $|xy| = |0 \cdot y| = |0| = 0 = 0 \cdot y = |0||y| = |x||y|$.
(v) Ol $x \geq 0, y \geq 0$. Nyt $|xy| = xy = |x||y|$.
(vi) Ol $x \leq 0, y \geq 0$. Nyt $|xy| = -xy = (-x) \cdot y = |x||y|$.
(vii) Ol $x = 0, y \leq 0$. Nyt $|xy| = |0 \cdot y| = |0| = 0 = 0 \cdot (-y) = |0||y| = |x||y|$.
(viii) Ol $x \geq 0, y \leq 0$. Nyt $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x||y|$.

(ix) Ol $x \leq 0, y \leq 0$. Nyt $|xy| = xy = (-x) \cdot (-y) = |x||y|$.

K5: Ol $x \in [1, 3]$,

$$\left| \frac{x+2}{2x+3} - \frac{4}{7} \right| = \left| \frac{7(x+2) - 4(2x+3)}{7(2x+3)} \right| \leq \frac{|-1||x-2|}{7(2 \cdot 1 + 3)} = \frac{1}{35}|x-2|.$$

Valitaan $K \geq 1/35$, niin tehtävän epäyhtälö toteutuu.

K6: Koska $\left| \frac{x+2}{2x+3} - \frac{4}{7} \right| = \frac{|x-2|}{7|2x+3|}$, on tehtävässä kysytty h on hyvin pieni, joten voidaan huoletta olettaa $h \leq 1$. Nyt $|x-2| < h \Rightarrow -h+2 < x < h+2$. Koska oletettiin $h \leq 1$, pätee ainakin $-1+2 = 1 < x < 3 = 1+2$, kuten oli tehtävässä K5. Siispä tehtävän K5 nojalla

$$\left| \frac{x+2}{2x+3} - \frac{4}{7} \right| \leq \frac{|x-2|}{35} \leq \frac{h}{35}.$$

Valitaan $h < 35 \cdot 7777^{-7777}$, niin tehtävän epäyhtälö toteutuu.