Analyysi 1, tehtävät loppuviikolle 39

Ratkaisuehdotelmia, Katriina Kerokoski

26. syyskuuta 2012

O3. Onko olemassa

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})?$$

Ratkaisu.

Näyttäisi siltä, että kun n kasvaa rajatta, termi $\sqrt{n}$ lähestyy termiä $\sqrt{n+1}$. Näiden välinen etäisyys näyttäisi siis lähestyvän nollaa. Todistetaan tämä väite lukujonon raja-arvon määritelmän avulla. Tutkitaan aluksi lukujonon jäsenten ja raja-arvoehdokkaan erotuksen itseisarvoa ja muokataan sitä laventamalla termillä $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. Sen jälkeen arvioidaan tätä etäisyyttä ylöspäin käyttämällä hyväksi tietoa, että $\sqrt{n+1}\leq 1$, kun $n \geq 1$.

$$|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0| = |\sqrt{n+1}-\sqrt{n}| = \left|\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Nyt halutaan, että $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $n > \frac{1}{\epsilon^2}$. Jos nyt valitsemme $K \geq \frac{1}{\epsilon^2}$, niin kaikilla $n > K$ pätee $|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0| < \epsilon$. Näiden havaintojen avulla voimme koota varsinaisen todistuksen.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $K \geq \frac{1}{\epsilon^2}$. Kaikilla $n > K$ pätee

$$|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{K}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2}}} \leq \epsilon.$$

O4. (a) Etsi monisteesta lause, jonka perusteella jono $0, 1, 0, 1, \ldots$ hajaantuu.

(b) Todista edellisessä tehtävässä mainittu lause. Saat käyttää monistetta vapaasti.

Ratkaisu kohtaan a.

Monisteen lause 4.2 sanoo, että jos (x_n) on suppeneva jono, niin jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $K > 0$, että $|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$, kun $n > K$ ja $p \in \mathbb{N}$.

Tiedetään, että jonolla $(x_n) = 0, 1, 0, 1, \ldots$ pätee $|x_n - x_{n+1}| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kun $\epsilon = 1/2$, ei siis ole olemassa sellaista $K > 0$, että pätisi $|x_n - x_{n+1}| < \epsilon = 1/2$, kun $n > K$. Siis jono (x_n) hajaantuu.

Ratkaisu kohtaan b. Oletetaan $\epsilon > 0$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $K > 0$, että pätee

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \text{kun } n > K.$$

Olkoon $n > K$ ja $p \in \mathbb{N}$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$|x_n - x_{n+p}| = |x_n - a - x_{n+p} + a| \leq |x_n - a| + |-x_{n+p} + a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

K4. Päteekö

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n^2 - 3n} = 0?$$

Ratkaisu.

Näyttäisi siltä, että kyseinen lukujono lähestyy nollaa, sillä nimittäjässä esiintyy n^2, ja osoittajassa ainoastaan n. Lähdetään siis todistamaan väitettä oikeaksi arvioimalla lukujonon jäsenten ja raja-arvoehdokkaan välisen erotuksen itseisarvoa. Jotta itseisarvomerkeistä päästään eroon, täytyy valita $n \geq 2$.

$$\left|\frac{3n+2}{2n^2-3n} - 0\right| = \left|\frac{3n+2}{2n^2-3n}\right| = \frac{3n+2}{2n^2-3n} \leq \frac{3n+2n}{2n^2-3n} = \frac{5}{2n-3}$$

Kun valitaan $n \geq 3$, pätee $2n - 3 = n + (n-3) \geq n$. Arvioidaan tämän valinnan avulla etäisyyttä ylöspäin.

$$\frac{5}{2n-3} \leq \frac{5}{n}$$

Halutaan siis, että pätee $\frac{5}{n} < \epsilon$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $n > \frac{5}{\epsilon}$. Valitaan siis kynnykseksi $K \geq \frac{5}{\epsilon}$. Lisäksi käytimme aiemmissa arvioinneissa hyödyksi rajausta, että $n \geq 3$, joten täytyy päteä myös $K \geq 3$. Kootaan nämä havainnot todistukseksi.

Olkoon $\epsilon > 0$ ja $K \geq \max\{\frac{5}{\epsilon}, 3\}$. Nyt kaikilla $n > K$ pätee

$$\left|\frac{3n+2}{2n^2-3n} - 0\right| \leq \frac{5}{n} < \frac{5}{K} \leq \frac{5}{\frac{5}{\epsilon}} = \epsilon.$$

K5. Päteekö
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n^2-3n} = 1?$$

Ratkaisu.

Koska edellisen tehtävän perusteella pätee $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n^2-3n} = 0$, tuskin pätee $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n^2-3n} = 1$. Todistetaan tämä vielä määritelmän avulla. Tutkitaan ensin lukujonon jäsenten ja raja-arvoehdokkaan erotuksen itseisarvoa.

$$\left|\frac{3n+2}{2n^2-3n} - 1\right| = \left|\frac{3n+2-2n^2+3n}{2n^2-3n}\right| = \left|\frac{-2n^2+6n+2}{2n^2-3n}\right|$$

Tutkitaan itseisarvojen poistamista varten, milloin osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia. Havaitaan, että kun $n \geq 4$, niin $-2n^2+6n+2 \leq 0$ ja $2n^2-3n \geq 0$. Valitaan siis $n \geq 4$ ja jatketaan arviointia:

$$\left|\frac{-2n^2+6n+2}{2n^2-3n}\right| = \frac{2n^2-6n-2}{2n^2-3n} \geq \frac{2n^2-6n-2n}{2n^2-3n} \geq \frac{2n^2-8n}{2n^2} = \frac{n-4}{n} = 1 - \frac{4}{n}$$

Olkoon $n \geq 8$, jolloin arviointia voidaan jatkaa vielä vähän :

$$1 - \frac{4}{n} \geq 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Olkoon siis $\epsilon = 1/4$. Nyt kaikilla $n \geq 8$ pätee

$$\left|\frac{3n+2}{2n^2-3n} - 1\right| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \epsilon,$$

joten ei päde $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n^2-3n} = 0$.

K6. Oletetaan, että lukujono (x_n) suppenee. Oletetaan, että kaikilla n on

$$y_n = (-1)^n x_n.$$

Osoita, että jono (y_n) suppenee, jos tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entä jos luovutaan tästä oletuksesta?

Ratkaisu.

Koska pätee $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, raja-arvon määritelmän perusteella kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $K > 0$, että kaikilla $n > K$ pätee $|x_n - 0| < \epsilon$. Tutkitaan nyt jonon y_n jäsenten etäisyyttä nollasta.

$$|y_n - 0| = |y_n| = |(-1)^n x_n| = |(-1)^n||x_n| = |x_n| = |x_n - 0|.$$

Olkoon nyt $\epsilon > 0$ ja $n > K$. Yllä olevien havaintojen perusteella pätee

$$|y_n - 0| = |(-1)^n x_n| = |x_n| < \epsilon,$$

joten pätee $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

Osoitetaan vielä, että jos $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja $a \neq 0$, niin ei voi päteä $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Tehdään vastaoletus, että $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\epsilon < 2|a|$. Nyt raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen K_1, että $|y_n - a| < \epsilon/4$, kun $n > K_1$. Siis $\epsilon/4 > |y_{2k+1} - a| = |(-1)^{2k+1}x_{2k+1} - a| = |-x_{2k+1} - a|$, kun $2k+1 > K_1$. Toisaalta, koska oletuksen perusteella $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, on olemassa sellainen K_2, että $|x_{2k+1} - a| < \epsilon/4$, kun $2k+1 > K_2$. Olkoon nyt $n = 2k+1 > K = \max\{K_1, K_2\}$. Nyt näiden havaintojen ja kolmioepäyhtälön perusteella pätee

$$\epsilon > \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} > |-x_n - a| + |x_n - a| \geq |-x_n - a + x_n - a| = |-2a| = 2|a|,$$

mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että $\epsilon < 2|a|$. Siis vastaoletus johtaa ristiriitaan, joten ei voi päteä $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.